Variedades Diferenciáveis

Publicações Matemáticas

Variedades Diferenciáveis

Elon Lages Lima

impa

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

Publicações Matemáticas

- Introdução à Topologia Diferencial – Elon Lages Lima
- Criptografia, Números Primos e Algoritmos – Manoel Lemos
- Introdução à Economia Dinâmica e Mercados Incompletos – Aloísio Araújo
- Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética – Carlos Gustavo Moreira
- Geometria Hiperbólica – João Lucas Marques Barbosa
- Introdução à Economia Matemática – Aloísio Araújo
- Superfícies Mínimas – Manfredo Perdigão do Carmo
- The Index Formula for Dirac Operators: an Introduction – Levi Lopes de Lima
- Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry – Ana Cannas da Silva
- Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes) – Carlos Gustavo T. A. Moreira e Nicolau Saldanha
- The Contact Process on Graphs – Márcia Salzano
- Canonical Metrics on Compact almost Complex Manifolds – Santiago R. Simanca
- Introduction to Toric Varieties – Jean-Paul Brasselet
- Birational Geometry of Foliations – Marco Brunella
- Introdução à Teoria das Probabilidades – Pedro J. Fernandez
- Teoria dos Corpos – Otto Endler
- Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist – Clodoaldo G. Ragazzo, Mário J. Dias Carneiro e Salvador Addas Zanata
- Elementos de Estatística Computacional usando Plataformas de Software Livre/Gratuito – Alejandro C. Frery e Francisco Cribari-Neto
- Uma Introdução a Soluções de Viscosidade para Equações de Hamilton-Jacobi – Helena J. Nussenzveig Lopes, Milton C. Lopes Filho
- Elements of Analytic Hypoellipticity – Nicholas Hanges
- Métodos Clássicos em Teoria do Potencial – Augusto Ponce
- Variedades Diferenciáveis – Elon Lages Lima
- O Método do Referencial Móvel – Manfredo do Carmo
- A Student's Guide to Symplectic Spaces, Grassmannians and Maslov Index – Paolo Piccione e Daniel Victor Tausk
- Métodos Topológicos en el Análisis no Lineal – Pablo Amster
- Tópicos em Combinatória Contemporânea – Carlos Gustavo Moreira e Yoshiharu Kohayakawa
- Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos – Paulo Ruffino
- Compressive Sensing – Adriana Schulz, Eduardo A.B.. da Silva e Luiz Velho
- O Teorema de Poncelet – Marcos Sebastiani
- Cálculo Tensorial – Elon Lages Lima
- Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números – Alexander Arbieto, Carlos Matheus e C. G. Moreira
- A Survey on Hiperbolicity of Projective Hypersurfaces – Simone Diverio e Erwan Rousseau
- Algebraic Stacks and Moduli of Vector Bundles – Frank Neumann
- O Teorema de Sard e suas Aplicações – Edson Durão Júdice

IMPA - ddic@impa.br - http://www.impa.br - ISBN: 978-85-244-0267-8

What win I if I gain the thing I seek?
A dream, a breath, a froth of fleeting joy.

Prefácio

Estas notas são uma reimpressão não modificada do texto de um curso introdutório sobre Variedades Diferenciáveis, que lecionei algumas vezes no IMPA, anos atrás. Ao escrevê-las, vali-me dos apontamentos do meu então aluno Jair Koiller. A presente edição foi digitada por Rogerio Dias Trindade. As figuras foram produzidas por Francisco Petrúcio. A todas estas pessoas, meus agradecimentos.

Rio de Janeiro, maio de 2007

Elon Lages Lima

Conteúdo

Capítulo I - Cálculo Diferencial **1**

1. Espaço euclidiano de dimensão p 1
2. Casos particulares 4
3. Derivadas de ordem superior 6
4. Versão intrínseca da regra da cadeia 8
5. A desigualdade do valor médio 11
6. Derivadas parciais 13
7. O teorema da função inversa 15
8. Forma local das submersões e o teorema das funções implícitas 16
9. A forma local das imersões 20
10. O teorema do posto 22
11. Campos de vetores em $\mathbb{R}^n$ 28
12. Referências 30

Capítulo II - Superfícies nos Espaços Euclidianos . . **31**

1. Parametrizações 31
2. A noção de superfície 34
3. Mudança de coordenadas 36
4. O espaço tangente 42
5. Como obter superfícies 46
6. Exemplos de superfícies 52
7. Grupos e Álgebras de Lie de matrizes 60
8. Campos de vetores tangentes a uma superfície 63

Capítulo III - Vetores Normais, Orientabilidade e Vizinhança Tubular **70**

1. Campos de vetores normais a uma superfície 71
2. Superfícies Orientáveis 80
3. A vizinhança tubular de uma superfície compacta . . . 86
4. A vizinhança tubular de uma superfície não-compacta 93

Capítulo IV - Variedades Diferenciáveis **102**

1. Sistemas de coordenads locais 102
2. Mudança de coordenadas 105
3. Variedades diferenciáveis 106
4. Exemplos de variedades 108
5. Variedades definidas por uma coleção de injeções . . 113
6. Variedades de Grassmann 123

Capítulo V - Aplicações Diferenciáveis entre Variedades **129**

1. Aplicações diferenciáveis 130
2. O espaço tangente 134
3. A derivada de uma aplicação diferenciável 137
4. Algumas identificações naturais 139
5. A aplicação esférica de Gauss 141
6. Estruturas de variedade em um espaço topológico . . 143

Capítulo VI - Imersões, Mergulhos e Subvariedades 147

1. Imersões 147
2. Mergulhos e subvariedades 151
3. Subvariedades 154
4. O espaço tangente a uma variedade produto. Derivadas parciais 156
5. A classe de uma subvariedade 157
6. Imersões cujas imagens são subvariedades 159
7. A curva de Kronecker no toro 163

Capítulo VII - Submersões, Transversalidade 168

1. Submersões 168
2. Relações de simetria 172
3. Grupos de Lie 175
4. Transversalidade 177
5. Transversalidade de funções 181
6. Aplicações de posto constante 183

Capítulo VIII - Partições da Unidade e suas Aplicações 186

1. Funções auxiliares 186
2. Algumas noções topológicas 190
3. Partições da unidade 193
4. O lema de Urysohn diferenciável 196
5. Aplicações diferenciáveis em subconjuntos arbitrários de variedades 199

Capítulo IX - Métricas Riemannianas **205**

1. Variedades riemannianas 205
2. A norma da derivada 211
3. A distância intrínseca 215
4. A topologia geral de uma variedade 219
5. Isometrias 222

Capítulo X - Espaços de Funções **230**

1. Funções semicontínuas em uma variedade 230
2. Espaços de funções 233
3. Invariância da topologia de $W^1(M; N)$ 237
4. Estabilidade de certas aplicações diferenciáveis 243
5. Aproximações em classe C^1 251
6. Topologias de classe C^r 259

Capítulo XI - Os Teoremas de Imersão e Mergulho de Whitney **269**

1. Conjuntos de medida nula em uma variedade 270
2. Imersões 274
3. Imersões injetivas e mergulhos 379
4. Espaços de Baire 286

Capítulo I

Cálculo Diferencial

Apresentamos neste capítulo alguns resultados clássicos do Cálculo Diferencial em espaços euclidianos. Enfatizamos o aspecto geométrico do Teorema da Função Inversa, que aplicaremos para obter as “formas locais” de certas aplicações diferenciáveis. Esses resultados serão amplamente utilizados no estudo das superfícies e das variedades diferenciáveis.

Omitimos a maior parte das demonstrações, pois o objetivo principal deste capítulo é fixar a notação e a terminologia para os subseqüentes. As demonstrações omitidas podem ser encontradas nas referências citadas no fim deste capítulo.

1 Espaço euclidiano de dimensão p

Como se sabe, o *espaço euclidiano de dimensão p* é o conjunto $\mathbb{R}^p$ de todas as seqüências $x = (x^1, \ldots, x^p)$ de p números reais.

Os vetores $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_p = (0, \ldots, 1)$ constituem a *base natural* de $\mathbb{R}^p$.

Seja U um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^m$.

Uma função vetorial $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ fica perfeitamente determinada por suas coordenadas

$$f^1, \dots, f^n\colon U \to \mathbb{R},$$

definidas pela relação

$$f(x) = (f^1(x), \dots, f^n(x)),\ x \in U.$$

Escrevemos $f = (f^1, \dots, f^n)$.

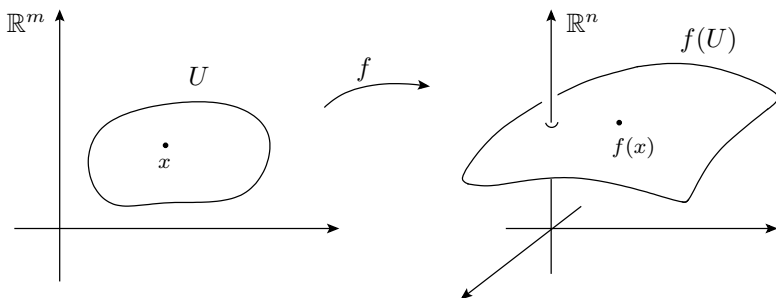



Figura 1.1.

Diz-se que a aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é *diferenciável* no ponto $x \in U$ quando existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + T \cdot h + r(h),\ \text{com}\ \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

(O donínio natural de uma aplicação cuja diferenciabilidade queremos investigar é um conjunto aberto, a fim de que seja arbitrário o modo pelo qual o ponto variável $x+h$ tende para o ponto x.)

É fácil de ver que as condições acima implicam:

$$T \cdot h = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

o que é interpretado geometricamente pela Figura 1.2:

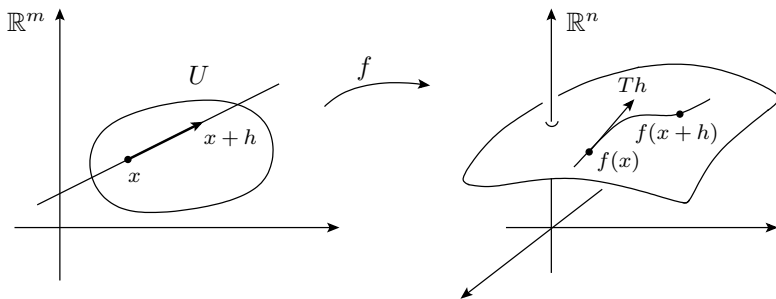



Figura 1.2.

É única, portanto, a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que dá a boa aproximação de f perto de x. Ela é chamada a *derivada* de f no ponto x e é indicada por $f'(x)$ ou $Df(x)$.

A aplicação f é diferenciável no ponto x se, e somente se, cada uma de suas coordenadas f^i o for. E além disso vale a equação

$$Df(x)\cdot h = (Df^1(x)\cdot h, \dots, Df^n(x)\cdot h).$$

Se T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, isto é, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, a matriz de T em relação às bases usuais do $\mathbb{R}^m$ e do $\mathbb{R}^n$ é a matriz (t^i_j) com n linhas e m colunas cujo elemento (i,j) é a i-ésima coordenada do vetor $T\cdot e_j$; imaginando cada $T\cdot e_j$ como vetor-coluna, temos:

$$M(T) = (T\cdot e_1 \cdots T\cdot e_j \cdots T\cdot e_m).$$

A matriz associada a $T = f'(x)$ chama-se *matriz jacobiana* de f no ponto x e é indicada por $Jf(x)$. O elemento (i,j) desta matriz é a i-ésima coordenada do vetor $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f'(x)\cdot e_j = (Df^1(x)\cdot e_j, \dots, Df^n(x)\cdot e_j)$, denominado j-ésima *derivada parcial*

de f no ponto x. Portanto

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2}(x) \dots \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1}(x) & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}(x) \dots \dfrac{\partial f^2}{\partial x^m}(x) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^2}(x) \dots \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix}$$

2 Casos particulares

a) Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Um *caminho* em $\mathbb{R}^n$ é simplesmente uma aplicação $f\colon J \to \mathbb{R}^n$.

Diz-se que o caminho $f\colon J \to \mathbb{R}^n$ tem *vetor-velocidade* no ponto $t_0 \in J$ se existe o limite

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

cuja interpretação é dada na Figura 1.3:

Figura 1.3.

O vetor-velocidade $\dfrac{df}{dt}(t_0)$ existirá se, e somente se, o caminho $f\colon J \to \mathbb{R}^n$ for diferenciável no ponto t_0. A identificação de $f'(t_0)$

com $\dfrac{df}{dt}(t_0)$ é dada pelo isomorfismo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) &\approx \mathbb{R}^n \\ T &\mapsto T \cdot 1\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{df}{dt}(t_0) = f'(t_0) \cdot 1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

b) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função real diferenciável em $x \in U$. A derivada $f'(x)$ é um elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^m)^*$, espaço dual do $\mathbb{R}^m$. É tradicional chamar $f'(x)$ a *diferencial* de f no ponto x e indicá-la por $df(x)$. A matriz jacobiana de f tem uma linha e m colunas, a saber

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x) \right).$$

Obtém-se assim a relação clássica $df(x) \cdot h = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x) \cdot h^i$.

O produto interno natural de $\mathbb{R}^m$ induz um isomorfismo

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^m &\approx (\mathbb{R}^m)^* \\ x &\mapsto x^*, \quad x^*(y) = \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

O *gradiente* de f no ponto $p \in U$ é o vetor $\operatorname{grad} f(p) \in \mathbb{R}^m$ que corresponde ao funcional linear $f'(p) \in (\mathbb{R}^m)^*$ por este isomorfismo.

Em outras palavras, o gradiente é caracterizado pela propriedade

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = f'(p) \cdot v \quad \text{para todo} \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Em particular, $\langle \operatorname{grad} f(p), e_i \rangle = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(p)$, ou seja,

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) e_i.$$

A expressão de $\operatorname{grad} f(p)$ em termos de uma base arbitrária (não ortonormal) é complicada. A definição intrínseca, que vimos acima, é muito conveniente para as aplicações teóricas.

3 Derivadas de ordem superior

Dado $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, diremos que uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ é *diferenciável em* U quando ela for diferenciável em todos os pontos $x \in U$. Define-se então a *aplicação derivada*

$$\begin{aligned} f'\colon U &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

Algumas vezes imaginamos f' como sendo a aplicação que a cada $x \in U$ associa a matriz jacobiana $Jf(x)$. Deste modo, f' se torna uma aplicação de U em $\mathbb{R}^{mn}$.

Dada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, escreve-se $|T| = \sup\{|T\cdot u|; u \in \mathbb{R}^m, |u| = 1\}$. Isto define uma norma no espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Como f' toma valores nesse espaço, é natural indagar se f' é contínua ou mesmo se f' tem derivada. Dizemos que f é *continuamente diferenciável* ou *de classe* C^1, e escrevemos $f \in C^1$, quando f é diferenciável em U e $f'\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é contínua.

Se $f'\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tem derivada no ponto $x \in U$, dizemos que f é *duas vezes diferenciável* no ponto x e escrevemos

$$f''(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

para indicar a derivada de f' em x. A rigor, $f''(x)$ é um elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, mas existe um isomorfismo natural $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \approx \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ que associa a cada transformação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ a transformação bilinear

$\widetilde{T}\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(u, v) = (T \cdot u) \cdot v$. Isto nos permite considerar a derivada segunda de f em x como sendo uma transformação bilinear, $f''(x)\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

As derivadas de ordem superior podem ser definidas indutivamente. Se $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é $(k-1)$-vezes diferenciável em U, então

$$f^{(k-1)}\colon U \to \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

é uma aplicação de U no espaço das aplicações $(k-1)$-lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$.

Se $f^{(k-1)}$ for diferenciável no ponto $x \in U$, diremos que f é *k-vezes diferenciável* neste ponto. O isomorfismo canônico

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \approx \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

permite considerar a derivada de $f^{(k-1)}$ em x como sendo uma aplicação k-linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. Se $f^{(k)}(x)$ existe em cada ponto $x \in U$, define-se a aplicação $f^{(k)}\colon U \to \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, e se $f^{(k)}$ for contínua diz-se que f é de *classe C^k* ou *k-vezes continuamente diferenciável*, e escreve-se $f \in C^k$ ou $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$.

O conjunto $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ de todas as aplicações $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ que são k vezes continuamente diferenciáveis é um espaço vetorial real (de dimensão infinita).

A importante classe C^∞ das aplicações *infinitamente diferenciáveis* é a interseção de todas as classes C^k,

$$C^\infty = C^0 \cap C^1 \cap C^2 \cap \dots$$

É claro que $C^\infty \subset \cdots \subset C^k \subset C^{k-1} \subset \cdots \subset C^1 \subset C^0$.

Pode-se mostrar que uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}$ é de classe C^k se existem, e são contínuas em U, todas as derivadas parciais mistas de f até a ordem k inclusive. (Vide 1.6 adiante.)

4 Versão intrínseca da regra da cadeia

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável no ponto $x \in U$, com $f(U) \subset V$, e $g\colon V \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável no ponto $y = f(x) \in V$. Então a aplicação composta $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto x e $(g \circ f)'(x) = g'(y) \circ f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.

É útil ter em mente os diagramas

Considerando as matrizes jacobianas de f, g e $g \circ f$ obtemos a antiga regra da cadeia,

$$\frac{\partial(g^i \circ f)}{\partial x^j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^i}{\partial y^k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f^k}{\partial x^j}(x), \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m \end{cases} .$$

Aplicações

1) Seja $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $x_0 \in U$. Dado $v \in \mathbb{R}^m$, seja $\lambda\colon t \mapsto \lambda(t)$ um caminho em U, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = x_0$ e $\lambda'(0) = v$. Então $f'(x_0) \cdot v$ é o vetor-velocidade do caminho $t \mapsto f(\lambda(t))$ em $t = 0$.

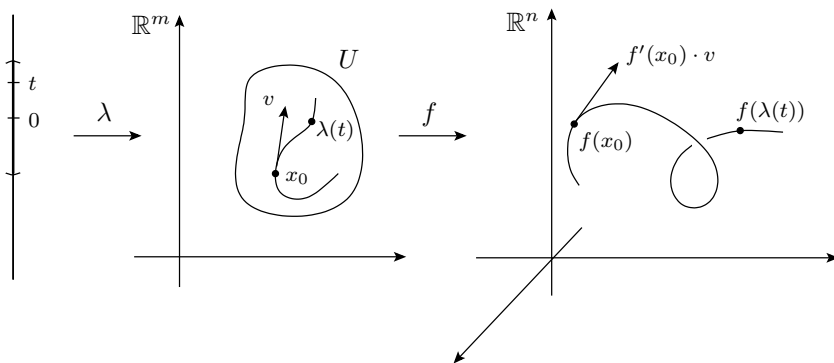



Figura 1.4.

2) Seja $f: U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ e admitamos que f tem uma inversa $g = f^{-1}: V \to \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, (isto é, $f(U) = V$, $g(V) = U$, $f \circ g = \mathrm{id}_V$ e $g \circ f = \mathrm{id}_U$) que é diferenciável no ponto $y = f(x)$. Então $f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, cujo inverso é $g'(y): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Em particular $m = n$.

Um *difeomorfismo* $f: U \to V$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável. Se ambas, f e f^{-1} são de classe C^k, dizemos que f é um *difeomorfismo de classe* C^k.

A aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 \in \mathbb{R}$ é exemplo de um homeomorfismo diferenciável C^∞ que não é um difeomorfismo.

Para finalizar, examinaremos as derivadas sucessivas da aplicação composta gf, onde g e f são r vezes direrenciáveis.

A regra da cadeia pode escrever-se, resumidamente, como

$$(1) \qquad (gf)' = g'f \cdot f'.$$

Isto significa, evidentemente, que $(gf)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, para cada $x \in U$, o ponto indicando composição de aplicações lineares. Observemos que, se L_1 e L_2 são lineares (e a composta $L_2 \cdot L_1$ faz sentido), a aplicação $(L_1, L_2) \mapsto L_2 \cdot L_1$ é bilinear. Resulta então

da regra de derivação de aplicações bilineares, que (1) acarreta

$$(gf)'' = (g'f)' \cdot f' + g'f \cdot f''.$$

Usando a regra da cadeia:

$$(gf)'' = g''f \cdot (f', f') + g'f \cdot f''. \tag{2}$$

Na fórmula (2), usamos a notação $B \cdot (L_1, L_2)$, onde B é bilinear e L_1 , L_2 são lineares, para indicar a aplicação bilinear $(h, k) \mapsto B(L_1 \cdot h, L_2 \cdot k)$. Observe-se que a aplicação $(B, L_1, L_2) \mapsto B \cdot (L_1, L_2)$ é trilinear. Portanto, derivando (2), obtemos

$$(gf)'' = g''f \cdot (f', f', f') + 3g''f \cdot (f'', f') + g'f \cdot f''. \tag{3}$$

Na fórmula (3), se L, L_1 , L_2 , L_3 são lineares, se B é bilinear e T é trilinear, as notações $T \cdot (L_1, L_2, L_3)$ e $T \cdot (B, L)$ indicam respectivamente as aplicações trilineares $(h_1, h_2, h_3) \mapsto T(L_1 \cdot h_1, L_2 \cdot h_2, L_3 \cdot h_3)$ e $(h_1, h_2, h_3) \mapsto T(B(h_1, h_2), L \cdot h_3)$. De maneira análoga, derivando (3), obteremos a fórmula para a 4ª derivada da composta gf:

$$\begin{aligned}(gf)^{\mathrm{IV}} = {} & g^{\mathrm{IV}}f \cdot (f', f', f', f') + 6g''f \cdot (f'', f', f') \\ & + 4g''f \cdot (f'', f') + 3g''f \cdot (f'', f'') + g'f \cdot f^{\mathrm{IV}}.\end{aligned} \tag{4}$$

As notações são análogas às anteriores. De um modo geral, uma indução fácil permite constatar que, dado i, para cada partição $i_1 + \cdots + i_k = i$, existe um inteiro $n(i_1, \ldots, i_k)$ tal que a i-ésima derivada da aplicação composta gf tem a expessão seguinte:

$$(g \circ f)^{(i)} = \sum_{k=1}^{i} n(i_1, \ldots, i_k) g^k f \cdot \left(f^{(i_1)}, \ldots, f^{(i_k)}\right)$$

onde, para cada k, temos $i_1 + \cdots + i_k = i$.

5 A desigualdade do valor médio

Se $x, y \in \mathbb{R}^m$, indiquemos por

$$[x, y] = \{x + t(y - x);\ 0 \leq t \leq 1\}$$

o segmento de reta fechado ligando x e y. O correspondente segmento de reta aberto é

$$(x, y) = \{x + t(y - x);\ 0 < t < 1\}.$$

Seja $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ contínua no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se o segmento de reta fechado $[x, x + h]$ está contido em U e f é diferenciável em todos os pontos do segmento aberto $(x, x + h)$, então

$$|f(x + h) - f(x)| \leq M \cdot |h|, \quad \text{onde} \quad M = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(x + th)|.$$

(Lembremos que se $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear então $|T| = \sup_{|v|=1} |T \cdot v|.$)

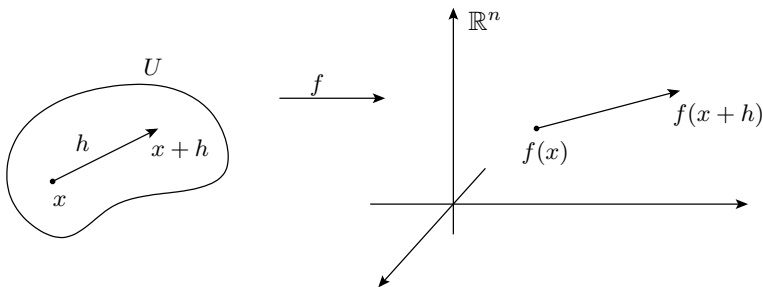



Figura 1.5.

O quociente de $|f(x+h) - f(x)|$ por $|h|$ não excede

$$M = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(x+th)|.$$

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Uma aplicação diferenciável $f: U \to \mathbb{R}^n$ diz-se *uniformemente diferenciável* no conjunto $X \subset U$ quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ implica $|f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h| < \varepsilon \cdot |h|$, *seja qual for* $x \in X$.

É uma conseqüência da desigualdade do valor médio que se $K \subset U$ é compacto, então toda aplicação $f: U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, é uniformemente diferenciável em K. (Vide AER^n, pag. 28.) Como aplicação deste fato, temos a proposição abaixo. (Vide AER^n, pag. 31, Exercício 3.)

Proposição. *Seja* $f: U \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *num aberto* $U \subset \mathbb{R}^m$. *Se* $f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *é injetiva em todos os pontos* x *de um compacto* $K \subset U$, *então existem números reais* $c > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que* $|f(y) - f(x)| \geq c|y - x|$ *quaisquer que sejam* $x \in K$, $y \in U$ *com* $|g - x| \leq \delta$.

Demonstração: Definamos $\lambda: K \times S^{m-1} \to \mathbb{R}$ pondo $\lambda(x, u) = |f'(x) \cdot u|$. Como $\lambda > 0$ em todos os pontos do conjunto compacto $K \times S^{m-1}$, existe $c > 0$ tal que $\lambda(x, u) \geq 2c$, sejam quais forem $x \in K$, $u \in S^{m-1}$. Daí resulta que $|f'(x) \cdot h| \geq 2c \cdot |h|$ para todo $x \in K$ e todo $h \in \mathbb{R}^m$. Ora, sendo f uniformemente diferenciável em K, existe $\delta > 0$ tal que $|h| < 0$ implica $x + h \in U$ e $|f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h| < c \cdot |h|$ para todo $x \in K$. Conseqüentemente, se $x \in K$, $y \in U$ e $|y - x| < \delta$, teremos:

$$
\begin{aligned}
&|f(y) - f(x)| \\
&= |f'(x) \cdot (y - x) + f(y) - f(x) - f'(x) \cdot (y - x)| \\
&\geq |f'(x) \cdot (y - x)| - |f(y) - f(x) - f'(x) \cdot (y - x)| \\
&\geq 2c \cdot |y - x - c|y - x| = c \cdot |y - x|.
\end{aligned}
$$

6 Derivadas parciais

Seja $\mathbb{R}^m = E \oplus F$ o espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$, escrito como soma direta de dois subespaços E, F. Cada elemento $z \in \mathbb{R}^m$ é representado por um par $z = (x, y)$, $x \in E$, $y \in F$.

Dados um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, as *derivadas parciais* de f num ponto $(a, b) \in U$ são aplicações lineares $\partial_1 f(a, b)\colon E \to \mathbb{R}^n$, $\partial_2 f(a, b)\colon F \to \mathbb{R}^n$, definidas pelas relações

$$f(a+h, b) = f(a, b) + \partial_1 f(a, b) \cdot h + r_1(h), \text{ com } \lim_{h \to 0} \frac{r_1(h)}{|h|} \to 0$$

e

$$f(a, b+k) = f(a, b) + \partial_2 f(a, b) \cdot k + r_2(k), \text{ com } \lim_{h \to 0} \frac{r_2(k)}{|k|} \to 0.$$

Naturalmente, f pode possuir uma, ambas, ou nenhuma das derivadas parciais em um ponto $(a, b) \in U$.

A derivada parcial $\partial_1 f(a, b)$, caso exista, é a derivada da *aplicação parcial* $x \mapsto f(x, b)$ no ponto $a \in E$, estando tal aplicação definida em um aberto de E contendo a. Analogamente, $\partial_2 f(a, b)$ é a derivada, em $b \in F$, da aplicação parcial $y \mapsto f(a, y)$.

É imediato ver que, se $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $z = (a,b) \in U$, então as derivadas parciais existem e $\partial_1 f(z) = f'(z)|E$, $\partial_2 f(z) = f'(z)|F$. A recíproca é falsa, como se aprende no cálculo elementar.

O teorema abaixo dá uma condição suficiente para diferenciabilidade em termos de derivadas parciais.

Teorema. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $\mathbb{R}^m = E \oplus F$ uma decomposição em soma direta. Uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 se, e somente se, para todo $z = (x,y) \in \mathbb{R}^m$ as derivadas parciais existem e, além disso, as aplicações $\partial_1 f\colon U \to \mathcal{L}(E,\mathbb{R}^n)$ e $\partial_2 f\colon U \to \mathcal{L}(F,\mathbb{R}^n)$ são contínuas.*

No caso da decomposição usual $\mathbb{R}^m = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$, onde cada E_i é o subespaço unidimensional gerado pelo i-ésimo vetor básico e_i, para cada $z = (x^1,\ldots,x^m)$, identificamos $\partial_i f(z)$ com o vetor

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^1,\ldots,x^i+t,\ldots,x^m) - f(x^1,\ldots,x^m)}{t}.$$

Podemos então enunciar o

Corolário. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $f(z) = (f^1(z),\ldots,f^n(z))$, é de classe C^k se, e somente se, todas as derivadas parciais mistas*

$$\frac{\partial^\alpha f^i}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_\alpha}}(z),\ z \in U,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le i_1,\ldots,i_\alpha \le m$$

de ordem $\alpha \le k$ existem e dependem continuamente de $z \in U$.

7 O teorema da função inversa

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ tal que, num ponto $x_0 \in U$, a derivada $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo. Então f aplica difeomorficamente uma vizinhança menor V de x_0 sobre uma vizinhança W de $f(x_0)$.

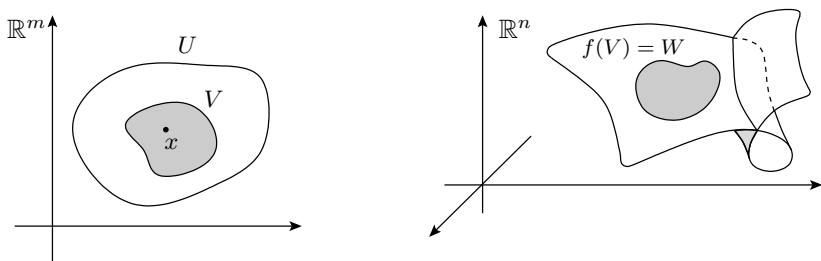



Figura 1.6.

Deve-se lembrar sempre que se $f\colon U \to V$ é um difeomorfismo então, para todo $x \in U$, $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, mas o Teorema da Função Inversa não é uma recíproca completa deste fato. Ele permite apenas concluir que se $f \in C^k$ $(k \geq 1)$ e $f'(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in U$, então f é um *difeomorfismo local*, isto é, cada $x \in U$ tem uma vizinhança aplicada por f difeomorficamente sobre uma vizinhança de $f(x)$.

A aplicação $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(z) = e^z$, fornece um exemplo de difeomorfismo local C^∞ que não é globalmente um difeomorfismo.

O teorema da função inversa evidencia o fato de ser $f'(x_0)$ uma "boa aproximação" de f, pois a informação de que $f'(x_0)$ é um isomorfismo acarreta ser f biunívoca em uma vizinhança de x_0.

8 A forma local das submersões e o teorema das funções implícitas

Seja $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ chama-se uma *submersão* quando, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x)\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetora. O exemplo típico é a projeção

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto y. \end{aligned}$$

Com relação ao teorema abaixo, lembramos que, dada uma transformação linear sobrejetora $T\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, se tomamos

$E =$ núcleo de T e

$F =$ qualquer subespaço suplementar de E em $\mathbb{R}^{m+n}$ então, necessariamente, a restrição

$$T|F\colon F \to \mathbb{R}^n \quad \text{é um isomorfismo.}$$

Teorema (forma local das submersões). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k, $k \geq 1$. Suponha que, no ponto $z_0 \in U$, a derivada $f'(z_0)\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetora. Escolhida uma decomposição em soma direta $E \oplus F = \mathbb{R}^{m+n}$ $(z_0 = (x_0, y_0))$ tal que $\partial_2 f(z_0) = f'(z_0)|F$ é um isomorfismo, então f se comporta localmente como uma projeção. Com isto queremos*

dizer que existem abertos V, W, Z, com

$$x_0 \in V,\ \ V \subset E,$$
$$z_0 \in Z,\ \ Z \subset U,$$
$$f(z_0) \in W,\ \ W \subset \mathbb{R}^n,$$

e um difeomorfismo de classe C^k, $h\colon V \times W \to Z$ tal que $f \circ h\colon (x, w) \mapsto w$.

Convém ter em mente a Figura 1.7, que põe em relevo o caráter geométrico do difeomorfismo h:

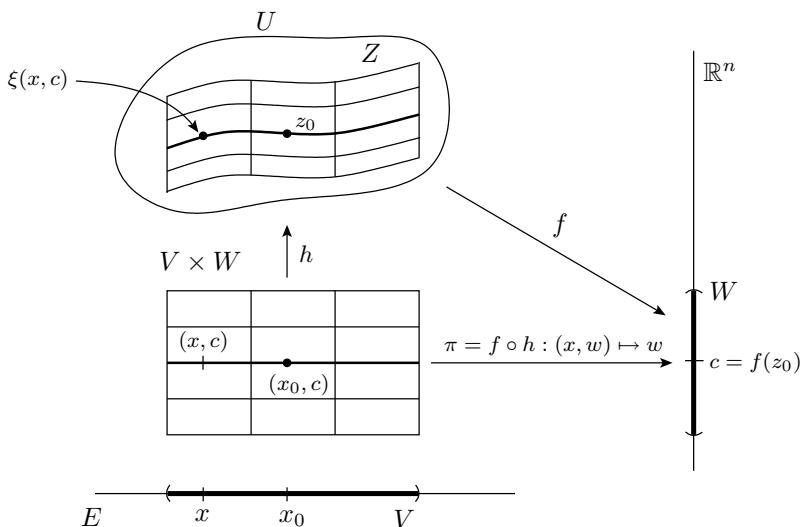



Figura 1.7.

Fazendo uso do teorema da função inversa podemos demonstrar rapidamente a forma local das submersões, como se segue:

Seja $\varphi\colon U \to E \times \mathbb{R}^n$ de classe C^k, definida por $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$. A derivada $\varphi'(z_0)\colon \mathbb{R}^{m+n} \to E \times \mathbb{R}^n$ é dada pela fórmula $(h, k) \mapsto (h, \partial_1 f(z_0) \cdot h + \partial_2 f(z_0) \cdot k)$, $h \in E$, $k \in F$. Observemos que a aplicação linear $(u, v) \mapsto (u, (\partial_2 f(z_0))^{-1}$

$(v - \partial_1 f(z_0) \cdot u))$, $u \in E$, $v \in \mathbb{R}^n$, é a inversa de $\varphi'(z_0)$ e ganhemos o direito de aplicar o teorema da função inversa. Se escrevemos $f(z_0) = c$, φ é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança de z_0 sobre uma vizinhança de (x_0, c). Esta última pode ser escolhida na forma $V \times W$, onde V é aberto em E e W é aberto em $\mathbb{R}^n$. Ponhamos

$$Z = \varphi^{-1}(V \times W) \quad \text{e} \quad \varphi^{-1}\colon V \times W \to Z.$$

Resta examinar o aspecto da composta $f \circ h$.
Como $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$ segue-se que $h = \varphi^{-1}$ é da forma $h(x, w) = (x, h_2(x, w))$. Se $(x, w) \in V \times W$, então

$$\begin{aligned}(x, w) &= \varphi \circ h(x, w)\\ &= \varphi(x, h_2(x, w))\\ &= (x, f(x, h_2(x, w)))\\ &= (x, f \circ h(x, w)).\end{aligned}$$

Logo $f \circ h(x, w) = w$, para todo $(x, y) \in V \times W$.

Corolário. *Uma submersão de classe* C^k $(k \geq 1)$ *é uma aplicação aberta.*

Observações:

1) Pode parecer estranho aplicar o teorema da função inversa a $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^{m+n} \to E \times \mathbb{R}^n$ pois $E \times \mathbb{R}^n$ não é um espaço euclidiano. O leitor está convidado a justificar esta passagem.

2) Da relação $f \circ h = \pi\colon V \times W \to W$ resulta que a derivada $f'(p)$ é sobrejetora para todo $p \in Z$. Assim o conjunto dos pontos $p \in \mathbb{R}^{m+n}$ tais que $f'(p)$ é sobrejetora é aberto.

3) A decomposição em soma direta $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$ pode ser sempre tomada com E e F gerados pelos eixos coordenados. É o que faremos doravante em todas as aplicações. Com efeito:

Uma decomposição em soma direta do tipo $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ significa uma partição $\{e_1, \ldots, e_{m+n}\} = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\} \cup \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}\}$ da base canônica do $\mathbb{R}^{m+n}$. Dada a partição, pomos $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ como sendo subespaço gerado por $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ e $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{m+n}$ como o subespaço gerado pelos vetores restantes $\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}\}$. É óbvio que $\mathbb{R}^{m+n}$ é a soma direta desses dois subespaços e escrevemos $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$.

Uma vez dada tal decomposição, escrevemos os elementos de $\mathbb{R}^{m+n}$ como pares $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Por exemplo, seja $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^2$ é gerado por e_1, e_3 e $\mathbb{R}$ por e_2 . Então todo $z = (x^1, x^2, x^3)$ será denotado por $z = (u, v)$, $u = (x^1, 0, x^3) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (0, x^2, 0) \in \mathbb{R}$.

Dada uma aplicação linear sobrejetora $T\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, existe uma decomposição $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ tal que $T|\mathbb{R}^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Basta observar que os vetores $Te_1, \ldots,$ Te_{m+n} geram $\mathbb{R}^n$ e portanto é possível selecionar dentre eles uma base $\{Te_{j_1}, \ldots, Te_{j_n}\}$. Sejam $i_1, \ldots, i_m$ os índices restantes. A partição $\{1, 2, \ldots, m+n\} = \{i_1, \ldots, i_m\} \cup \{j_1, \ldots, j_n\}$ fornece a decomposição desejada.

4) Na demonstração do teorema surgem fatos importantes, que devemos destacar: o difeomorfismo h é da forma $h(x, w) = (x, h_2(x, w))$, $x \in V$, $w \in W$. Isto significa que as "fibras" $\{x\} \times W$ são movimentadas apenas no sentido vertical, como aparece na Figura 1.7. Outra novidade aparece se consideramos a aplicação $\xi = \xi_0\colon V \to F$, $\xi(x) = h_2(x, c)$, de classe C^k. Observemos que $f(x, \xi(x)) = c$ para todo $x \in V$. Por outro lado, se $(x, y) \in Z$ é tal que $f(x, y) = c$, então $(x, y) = h \circ \varphi(x, y) = h(x, c) = (x, h_2(x, c)) = (x, \xi(x))$, ou seja, $y = \xi(x)$. Este fato é o importante *teorema das funções implícitas*, que pode ser sintetizado na seguinte afirmação:

O conjunto $f^{-1}(c) \cap Z$ *é o gráfico da aplicação* $x \in V \mapsto \xi(x) = h_2(x, c) \in F$*, de classe* C^k*.*

Em outras palavras, a equação $f(x, y) = c$ define, implicitamente, na vizinhança de x_0, a aplicação $y = \xi(x)$, de classe C^k cuja derivada é dada por

$$\xi'(x) = -\left[\partial_2 f(x, \xi(x))\right]^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x)).$$

O parâmetro c pode variar no aberto W. Conclui-se que existem abertos $V \subset E$, contendo x_0, $W \subset \mathbb{R}^n$ contendo c e $Z \subset U$ contendo z_0 tais que para cada $y \in W$ e para cada $x \in v$ existe um único $\xi(x, y) = h_2(x, y) \in F$ tal que $(x, \xi(x, y)) \in Z$ e $f(x, \xi(x, y)) = y$. Tal situação fica também evidente na Figura 1.7.

Veremos no Capítulo II que o conjunto $f^{-1}(c) \cap Z$ é uma superfície m-dimensional de classe C^k no $\mathbb{R}^{m+n}$ (seção 2.5.2).

9 A forma local das imersões

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+n}$ chama-se uma *imersão* quando, para cada $x \in U$, a derivada $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é uma transformação linear injetora. O exemplo típico é a inclusão

$$i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}, \quad x \mapsto (x, 0).$$

Teorema (forma local das imersões). *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^m$ *um aberto e* $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+n}$ *uma aplicação de classe* C^k*,* $k \geq 1$*. Suponha que no ponto* $x_0 \in U$ *a derivada* $f'(x_0)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ *é injetora. Então* f *se comporta localmente como uma inclusão. Com isto queremos dizer que existem abertos* V*,* W*,* Z*, com*

$$\begin{aligned} &f(x_0) \in Z, && Z \subset \mathbb{R}^{m+n}, \\ &x_0 \in V, && V \subset U \subset \mathbb{R}^m, \\ &0 \in W, && W \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

e um difeomorfismo de classe C^k, $h\colon Z \to V \times W$, tal que $h \circ f(x) = (x, 0)$, para cada $x \in V$.

A Figura 1.8, que corresponde a $m = n = 1$, indica geometricamente a situação geral. Convém entendê-la bem.

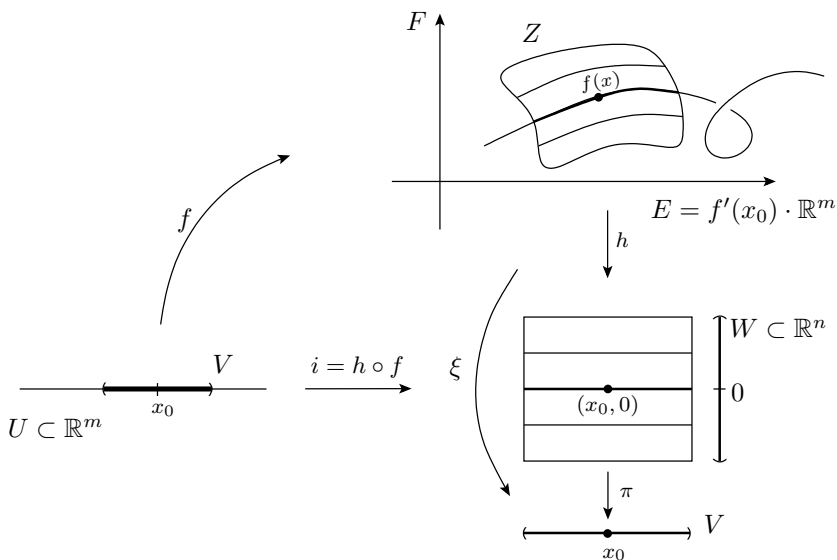



Figura 1.8.

Demonstração: Seja $E = f'(x_0) \cdot \mathbb{R}^m$ e escolhamos para F qualquer suplementar de E em $\mathbb{R}^{m+n}$, ou seja, $\mathbb{R}^{m+1} = E \oplus F$. Definamos a aplicação de classe C^k, $\varphi\colon U \times F \to \mathbb{R}^{m+n}$, dada por $\varphi(x, y) = f(x) + y$. Então $\varphi(x_0, 0) = f(x_0)$ e, se $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times F$, temos $\varphi'(x_0, 0) \cdot (u, v) = f'(x_0) \cdot u + v$. É imediato ver que $\varphi'(x_0, 0)$ é um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, φ é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança de $(x_0, 0)$ sobre uma vizinhança de $f(x_0)$. Podemos escolher a primeira da forma $V \times W$,

com $x_0 \in V \subset U$ e $0 \in W \subset F$, e escrever $Z = \varphi(V \times W)$. Seja $h = \varphi^{-1}\colon Z \to V \times W$. Como $\varphi(x,0) = f(x)$, segue-se que $h \circ f(x) = h \circ \varphi(x,0) = (x,0)$, $x \in V$.
Para concluir, identificamos F com $\mathbb{R}^n$ (escolhendo uma base para F) a fim de simplificar o enunciado do teorema.

Observação: Se $\pi\colon V \times W \to V$, $\pi(x,w) = x$, é a primeira projeção, então $\xi = \pi \circ h\colon Z \to V$ goza da propriedade $\xi \circ f(x) = \pi \circ h \circ f(x) = \pi(x,0) = x$. Portanto $\xi | f(V) = (f|V)^{-1}$. Conclusão: f é um homeomorfismo de V sobre $f(V)$ cujo inverso é a restrição a $f(V)$ da aplicação $\xi\colon Z \to V$ de classe C^k. Esta observação será de importância no futuro.

A interpretação intuitiva de uma imersão $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+n}$ ($k \geq 1$) é a seguinte: para cada conjunto aberto suficientemente pequeno $V \subset U \subset \mathbb{R}^m$, $f(V)$ é uma "superfície m-dimensional no $\mathbb{R}^{m+n}$" dotada de um "plano tangente" $f(x) + f'(x) \cdot \mathbb{R}^m$ em cada ponto $f(x) \in f(V)$. Este plano varia continuamente com $x \in V$. Esta interpretação geométrica das imersões será desenvolvida no próximo capítulo.

10 O teorema do posto

O *posto* de uma aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é a dimensão de sua imagem $T \cdot \mathbb{R}^m$, isto é, o número máximo de vetores linearmente independentes entre $Te_1, \ldots, Te_m$. O posto de T é igual a r ($\rho(T) = r$) se, e somente se, a matriz de T (relativamente às bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, por exemplo) tem um determinante menor $r \times r$ não nulo e todo determinante menor de ordem $r+1$ é nulo.

O *posto de uma aplicação diferenciável* $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ num ponto $x \in U$ é, por definição, o posto de sua derivada $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Por exemplo, uma submersão $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ tem posto n em todo ponto $x \in U$. Analogamente, uma imersão $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

tem posto m em cada ponto. Por esta razão, as submersões e as imersões são denominadas as *aplicações de posto máximo*.

A aplicação que associa a cada $x \in U$ o posto de f em x é semi-contínua inferiormente. Mais precisamente, se f tem posto r num ponto $x \in U$, existe uma vizinhança V do ponto x tal que f tem posto $\geq r$ em todos os pontos de V. Com efeito, existe um determinante menor $r \times r$ não nulo da matriz jacobiana $Jf(x)$. Por continuidade, este menor não se anula em uma vizinhança V do ponto x, de modo que o posto de f é $\geq r$ em todos os pontos de V.

O teorema a ser demonstrado nesta seção estuda as aplicações de posto constante. Contém, como casos particulares, as formas locais das aplicações de posto máximo.

Lembramos que um subconjunto A de um espaço vetorial E é *convexo* se, para cada par de pontos $x, y \in A$, o segmento de reta $[x, y]$ está contido em A. Por exemplo, uma bola aberta $B_\delta(a)$, de centro em a e raio δ, num espaço normado, é convexa. Realmente, dados $x, y \in B_\delta(a)$ e $0 < t < 1$, temos $|[(1-t)x + ty] - a| = |(1-t)(x-a)+t(y-a)| \leq (1-t)|x-a|+t|y-a| < (1-t)\delta+t\delta = \delta$. A bola fechada de centro a é raio δ também é convexa.

Se $A \subset E \times F$ é subconjunto do produto cartesiano de dois espaços vetoriais, dizemos que A é *verticalmente convexo* se todo segmento de reta vertical $[(x, y'), (x, y'')]$ cujas extremidades estão em A, está inteiramente contido em A. Por exemplo, se $A = V \times W$ onde V é qualquer subconjunto de E e $W \subset F$ é convexo, então k é verticalmente convexo.

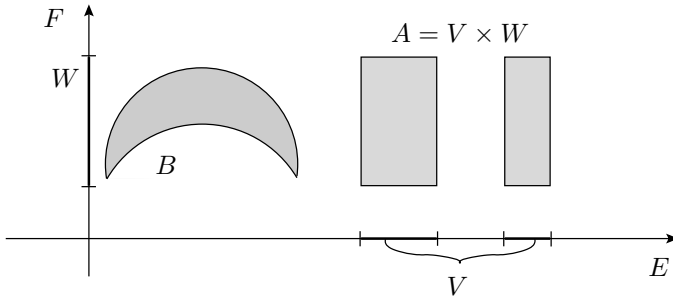



Figura 1.9. Os conjuntos A e B são verticalmente convexos.

Lema 1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um aberto verticalmente convexo. Se $f: U \to \mathbb{R}^p$ tem segunda derivada parcial $\partial_2 f$ identicamente nula em U então f é independente da segunda variável, isto é, $f(x,y) = f(x,y')$ para quaisquer (x,y) e (x,y') em U.*

Demonstração: Dados (x,y) e $(x,y') \in U$, o caminho $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}^p$ dado por $\varphi(t) = f(x,(1-t)y+ty')$ está bem definido e é diferenciável. Como $\varphi'(t) = \partial_2 f(u,(1-t)y+ty') \cdot (y'-y) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, resulta que φ é constante. Em particular, $\varphi(0) = \varphi(1)$, ou seja $f(x,y) = f(x,y')$.

Lema 2. *Seja $E \subset \mathbb{R}^{m+p}$ um subespaço m-dimensional. Existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \oplus R^p$ tal que a primeira projeção $\pi: \mathbb{R}^{m+p} \to \mathbb{R}^m$, $\pi(u,v) = u$, aplica E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Escolhamos uma base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ em E. A menos que seja $E = \mathbb{R}^{m+p}$ (isto é, $p = 0$) existe um vetor básico $e_{j_1} \in \mathbb{R}^{m+p} - E$. Então $u_1, \ldots, u_m$, e_{j_1} são linearmente independentes e geram um subespaço $E_1 \subset \mathbb{R}^{m+p}$. A menos que $E_1 = \mathbb{R}^{m+p}$ ($p = 1$), existe um vetor básico $e_{j_2} \in \mathbb{R}^{m+p} - E_1$. Então $u_1, \ldots, u_m$, e_{j_1}, e_{j_2} são linearmente independentes. Prosseguindo o raciocínio, obteremos vetores básicos $e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}$ tais

que $\{u_1, \ldots, u_m, e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}\}$ seja uma base do $\mathbb{R}^{m+p}$. Isto determina as decomposições em soma direta $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p = E \oplus \mathbb{R}^p$. A projeção π, relativa à primeira decomposição, transforma $\mathbb{R}^p$ em zero, logo aplica E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$.

Teorema do Posto. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+p}$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Suponha que f tem posto m em todos os pontos de U. Então, para todo $z_0 \in U$ existem difeomorfismos de classe C^k*

α, de um aberto do $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sobre uma vizinhança de z_0

β, de uma vizinhança de $f(z_0)$ sobre um aberto em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$.

tais que $\beta \circ f \circ \alpha\colon (x, y) \mapsto (x, 0)$

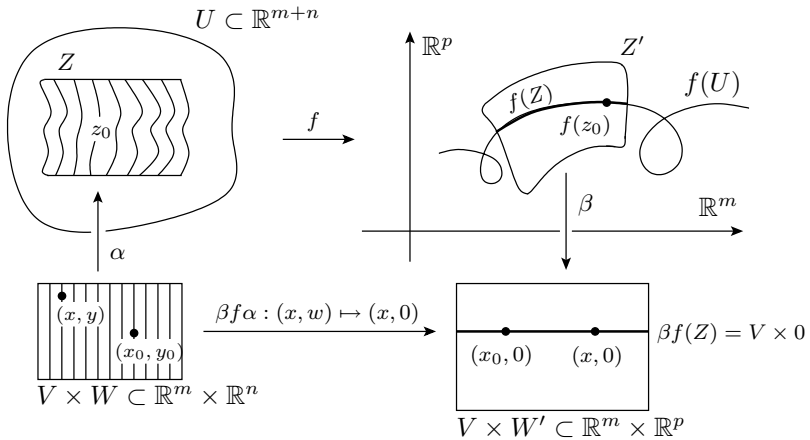



Figura 1.10.

Demonstração: Sejam $z_0 \in U$, arbitrário, e $E = f'(z_0) \cdot \mathbb{R}^{m+n} \subset \mathbb{R}^{m+p}$. Pelo Lema 2 existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p$ cuja primeira projeção aplica E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$. Então $(\pi \circ f)'(z_0) = \pi \circ f'(z_0)\colon\ \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetora. Pela forma local das submersões existe um difeomorfismo

$\alpha \in C^k$ de um aberto $V_0 \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sobre uma vizinhança de z_0 tal que $\pi f \alpha(x,y) = x$. Isto significa que $f\alpha(x,y) = (x, \lambda(x,y))$ onde $\lambda\colon V_0 \times W \to \mathbb{R}^p$ é de classe C^k.
Afirmação: $\partial_2 \lambda \equiv 0$. Realmente, para cada ponto $(x,y) \in V_0 \times W$ tem-se

$$(f \circ \alpha)'\colon (h,k) \mapsto (h, \partial_1\lambda \cdot h + \partial_2\lambda \cdot k),\ h \in \mathbb{R}^m,\ k \in \mathbb{R}^n.$$

Segue-se que $\pi \circ (f\alpha)'\colon (h,k) \mapsto h$. Se denotarmos por E_{xy} a imagem da aplicação linear $(f\alpha)'(x,y)$, levando em conta que $\dim E_{xy} = m$ concluiremos que π leva isomorficamente E_{xy} sobre $\mathbb{R}^m$, para cada $(x,y) \in V_0 \times W$. Se em algum ponto (x,y) a derivada $\partial_2\lambda$ fosse não-nula, isto é, $\partial_2\lambda \cdot k \neq 0$ para algum $k \in \mathbb{R}^n$, então $(f\alpha)'(0,k) = (0, \partial_2\lambda \cdot k) \neq 0$. Por conseguinte, π levaria um vetor não-nulo de E_{xy} no zero, o que contradiz a condição de isomorfismo. Podemos supor que W é conexo. Pelo Lema 1 resulta que $\lambda(x,y)$ não depende de y.

Seja $\alpha(x_0, y_0) = z_0$. Consideremos a injeção $i\colon V_0 \to V_0 \times W$, dada por $i(x) = (x, y_0)$. Então $f\alpha(x,y) = f\alpha i(x) = (x, \lambda(x, y_0))$ para todo $(x,y) \in V_0 \times W$. Como $f\alpha i$ tem derivada injetora em x_0, podemos aplicar a forma local das imersões: existe um difeomorfismo $\beta \in C^k$, de uma vizinhança de $f(z_0)$ sobre um aberto em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tal que $\beta f \alpha i\colon x \mapsto (x, 0)$, $x \in V \subset V_0$. (V é uma vizinhança de x_0, possivelmente menor que V_0).

Finalmente, $\beta \circ f \circ \alpha(x,y) = \beta \circ f \circ \alpha \circ i(x) = (x, 0)$, o que conclui a demonstração.

Proposição. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Para cada $r = 0, 1, \ldots, p$ ($p = \min\{m, n\}$), seja A_r o interior do conjunto dos pontos $x \in U$ nos quais f tem posto r. Então $A = A_0 \cup \cdots \cup A_p$ é (aberto e) denso em U.*

Demonstração: Seja V um subconjunto aberto não vazio de U. Queremos mostrar que $V \cap A \neq \varphi$. Consideremos um ponto $x \in V$

onde o posto de f assume seu valor máximo r_0 em V. Como a aplicação $x \in U \mapsto \rho(f'(x))$ é semi-contínua inferiormente, existe uma vizinhança $W \subset U$ de x na qual o posto de f é $\geq r_0$. Então o posto de f é exatamente igual a r_0 em todos os pontos de $W \cap V$. Ou seja, $\varphi \neq W \cap V \subset A_{r_0}$. Logo $V \cap A \neq \varphi$.

Corolário 1. *Dada $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, existe um subconjunto aberto denso $A \subset U$ tal que o posto de f é constante em cada componente conexa de A.*

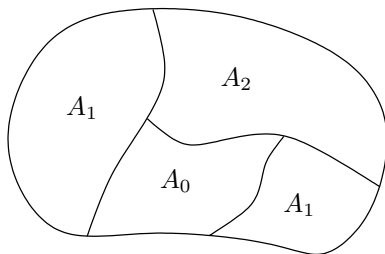



Figura 1.11.

Corolário 2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é $1-1$, então $m \leq n$ e o conjunto dos pontos $x \in U$ tais que $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora é aberto e denso em U.*

Demonstração: Seja $A = A_0 \cup \cdots \cup A_p$, $p = \min\{m, n\}$, como na proposição. Pelo teorema do posto, f não pode ser injetora em A_r, a menos que $r = m = p$. Portanto $m \leq n$ e $A_r = \varphi$ para $r \neq m$, de modo que $A = A_m$. Isto demonstra o corolário, pois o conjunto dos pontos $x \in U$ tais que $f'(x)$ tem posto m é claramente aberto.

Corolário 3. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é aberta, então $m \geq n$ e o conjunto dos pontos $x \in U$ tais que $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetora é aberto e denso em U.*

A demonstração é, mutatis mutandis, como a anterior.

11 Campos de vetores em $\mathbb{R}^n$

Seja U um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Um *campo de vetores* em U e simplesmente uma aplicação $v\colon U \to \mathbb{R}^n$. Se $v \in C^k$ dizemos que o campo de vetores é de classe C^k.

Sejam $p \in U$ e $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k. Chama-se *curva integral* do campo v, com condição inicial p, a um caminho diferenciável $\lambda\colon J \to U$, definido num intervalo aberto contendo $0 \in \mathbb{R}$, tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(t) = v(\lambda(t))$ para todo $t \in J$.

Visualizamos o campo v associando um vetor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ a cada ponto $x \in U$. O vetor-velocidade de uma curva integral de v num determinado ponto é justamente o vetor associado a este ponto pelo campo v.

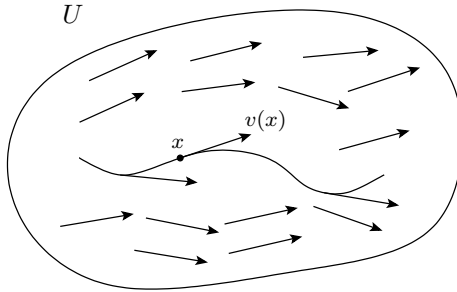



Figura 1.12.

Consideraremos agora o teorema de existência e unicidade das curvas integrais.

Teorema. *Sejam U um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1. Dado qualquer $p \in U$, existe uma curva integral $\lambda\colon (-c, c) \to U$ do campo v com condição inicial $\lambda(0) = p$. Se $\mu\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ for outra curva integral de v com $\mu(0) = p$, então $\lambda = \mu$ num intervalo $(-\delta, \delta) \subset (-c, c) \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Demonstração: Seja B uma bola fechada de centro p, na qual as normas $|v|$ e $|v'|$ são limitadas por uma constante $k > 0$. Em particular, $x, y \in B$ implica $|v(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Seja c um número real positivo tal que o produto ck seja menor do que 1 e do que o raio de B.

Consideremos o espaço métrico E, formado pelos caminhos contínuos $\lambda\colon [-c, c] \to B$, com a métrica da convergência uniforme. Sabe-se que E é completo. Definamos uma aplicação $f\colon E \to E$ pondo, para cada $\lambda \in E$, $f(\lambda) = \mu$, onde

$$\mu(t) = p + \int_0^t v(\lambda(s))\, ds.$$

Note-se que $|\mu(t) - p| \leq ck <$ raio de B, donde $\mu(t) \in B$ e portanto $\mu \in E$. Observe-se também que se $\mu_1 = f(\lambda_1)$ e $\mu_2 = f(\lambda_2)$ então, para cada t,

$$\begin{aligned} |\mu_1(t) - \mu_2(t)| \leq \int_0^t |v|\lambda_1(s)) - v(\lambda_2(s))| ds \leq \\ \leq ck \cdot \sup_s |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)| \end{aligned}$$

e portanto $d(\mu_1, \mu_2) \leq ck \cdot d(\lambda_1, \lambda_2)$. Como $ck < 1$, vê-se que $f\colon E \to E$ é uma contração. Pelo teorema do Ponto Fixo para contrações (ver [2], Capítulo X, Proposição 9), existe um único caminho $\lambda\colon [-c, c] \to B$ tal que $f(\lambda) = \lambda$. Isto significa

$$\lambda(t) = p + \int_0^t v(\lambda(s))\, ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, esta igualdade equivale a afirmar

$$\lambda'(t) = v(\lambda(t)),\ \lambda(0) = p.$$

Logo λ é uma curva integral com origem em p. Dada qualquer outra curva integral $\mu\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ com $\mu(0) = p$, podemos restringir λ e μ a um intervalo $[-\delta, \delta]$ tal que $\delta k < 1$ e $\delta k <$ raio de B. Então $\lambda = \mu$ em $[-\delta, \delta]$ pela unicidade do ponto fixo.

12 Referências

[1] Serge Lang - *Analysis I*, Addison-Wesley, Reading 1968.

[2] Elon L. Lima - *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[3] Walter Rudin - *Princípios de Análise Matemática*, Ao Livro Técnico, Rio, 1970.

[4] Michael Spivak - *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, 1966.

Capítulo II

Superfícies nos Espaços Euclidianos

A noção de superfície de dimensão m num espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ $(n \geq m)$ é generalização direta dos objetos que econtramos na geometria diferencial clássica – as curvas em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ que possuem vetor tangente em cada ponto e as superfícies em $\mathbb{R}^3$ que possuem plano tangente em cada ponto.

1 Parametrizações

Seja U_0 um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Uma imersão de classe C^k, $\varphi\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$, diz-se um *mergulho de classe* C^k de U_0 em $\mathbb{R}^n$, quando φ é um homeomorfismo de U_0 sobre $\varphi(U_0)$.

Dizemos também que φ é uma *parametrização* de classe C^k e dimensão m do subconjunto $U = \varphi(U_0) \subset \mathbb{R}^n$.

Em relação à injetividade de $\varphi'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, lembremos que as seguintes condições são equivalentes:

(i) $\varphi'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora.

(ii) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^j}(x) = \varphi'(x) \cdot e_j$, $j = 1, \ldots, m$ são vetores linearmente independentes.

(iii) A matriz jacobiana $n \times m$, $J\varphi(x) = \left(\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x)\right)$, tem posto m, isto é, algum de seus determinates menores $m \times m$ é distinto de zero.

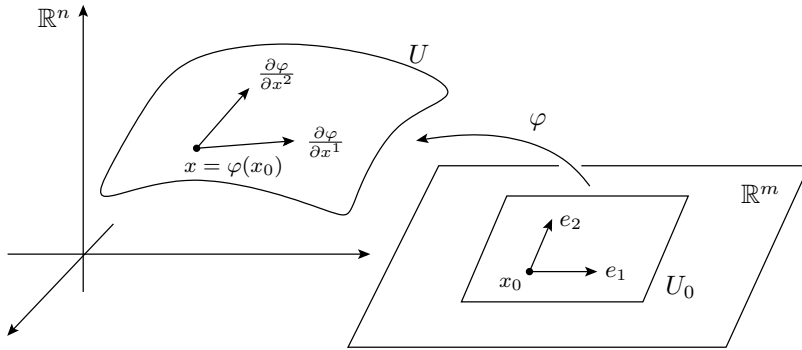



Figura 2.1.

Exemplos:

1) **Parametrizações de dimensão 1**.

Seja J um intervalo aberto de números reais. Um caminho de classe C^k, $\varphi\colon J \to \mathbb{R}^n$, é um mergulho se, e somente se, $\varphi\colon J \to \varphi(J)$ é um homeomorfismo e o vetor velocidade $\varphi'(t)$ nunca se anula. Existem imersões biunívocas C^∞ de um intervalo aberto dos reais em $\mathbb{R}^2$ que não são homeomorfismos sobre sua imagem. Voltaremos a tratar do assunto posteriormente. A Figura 2.2 ilustra esta situação:

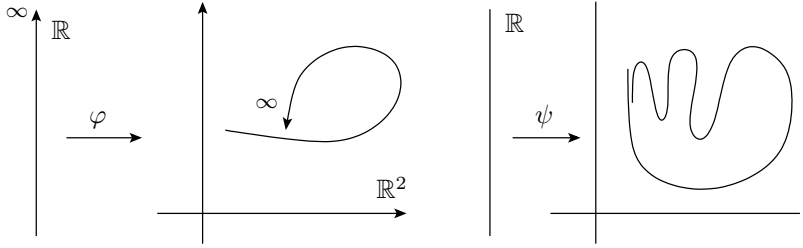



Figura 2.2.

2) **Parametrizações de dimensão 2 em** $\mathbb{R}^3$.

Seja U_0 um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^2$ e $\varphi\colon U_0 \to U = \varphi(U_0) \subset \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (\varphi^1(u,v), \varphi^2(u,v), \varphi^3(u,v))$ uma parametrização de classe C^k.

O conjunto $U = \varphi(U_0)$ é chamado uma *superfície local*. A independência linear dos vetores

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial\varphi^1}{\partial u}, \frac{\partial\varphi^2}{\partial u}, \frac{\partial\varphi^3}{\partial u}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial\varphi^1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi^2}{\partial v}, \frac{\partial\varphi^3}{\partial v}\right)$$

é equivalente a ser não-nulo o produto vetorial $n = n(u,v) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$, chamado *vetor normal* a U no ponto $\varphi(u,v)$.

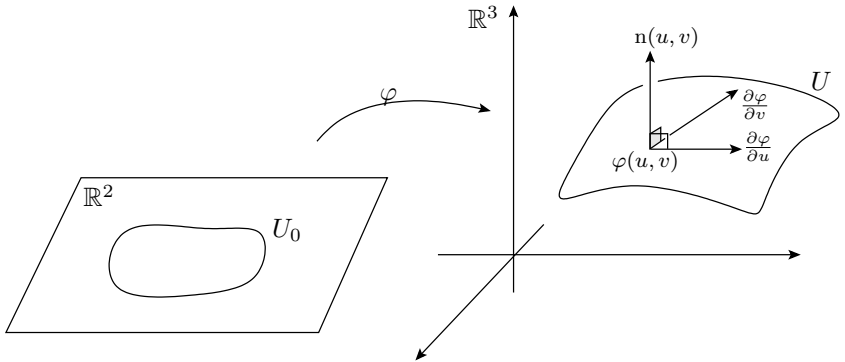



Figura 2.3.

2 A noção de superfície

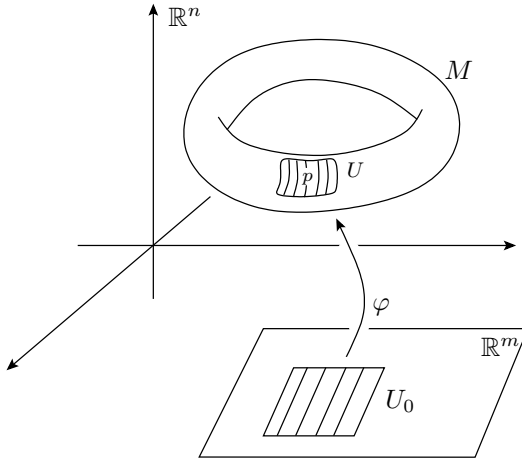



Figura 2.4.

Definição: *Uma superfície m-dimensional do* $\mathbb{R}^n$ (*de classe* C^k) é um subconjunto não vazio

$$M = M^m \subset \mathbb{R}^n$$

no qual todo ponto p possui uma vizinhança aberta U dotada de uma parametrização de classe C^k e dimensão m.

O conjunto M tem a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$. Assim a vizinhança U é a interseção de M com um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

O número $n - m$ é chamado a *co-dimensão* de M em $\mathbb{R}^n$.

Uma superfície de dimensão n no $\mathbb{R}^{n+1}$ é denominada uma *hiperfície*.

Uma superfície zero-dimensional em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto de pontos isolados. Uma superfície de dimensão n em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Vemos assim que os casos extremos não têm maior importância. Mais interessante é o exemplo abaixo.

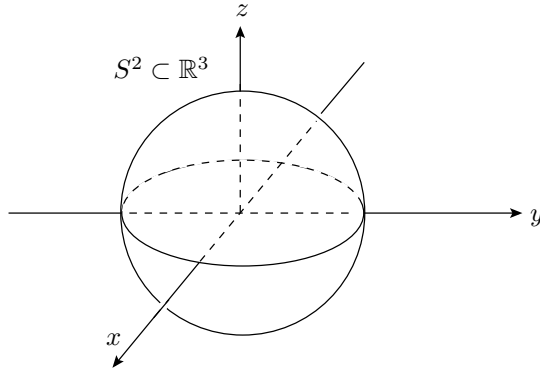



Figura 2.5.

A *esfera unitária de dimensão* n é o conjunto

$$S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle y, y \rangle = 1\}.$$

S^n é uma hiperfície compacta de classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Vamos mostrar que $2(n+1)$ parametrizações são suficientes para cobrir a esfera.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n+1$, ponhamos:

$$H_i^+ = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; y^i > 0\} \text{ e } H_i^- = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; y^i < 0\}.$$

Estes são os *semi-espaços* abertos determinados pelo hiperplano $y^i = 0$.

Os conjuntos

$$U_i^+ = H_i^+ \cap S^n = \{y \in S^n \mid y^i > 0\} \text{ e } U_i^- = H_i^- \cap S^n = \{y \in S^n \mid y^i < 0\}$$

são abertos em S^n e $\bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^-) = S^n$. Cada uma destas vizinhanças U_i^+ é dotada de uma parametrização de classe C^∞, a saber

$$\varphi_i^\pm : B \to U_i^\pm ; \; i = 1, \ldots, n+1$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^{i-1}, \pm\sqrt{1 = |x|^2}, x^i, \ldots, x^n).$$

Estamos indicando com B a bola aberta de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^n$: $\quad B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$.

Para $n = 1$ temos $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, o *círculo unitário* do plano. O procedimento acima consiste em tomar y como parâmetro nos semi-círculos abertos $U_1^+ = \{(x, y) \in S^1; x > 0\}$ e $U_1^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$, enquanto que x será o parâmetro em U_2^+ e U_2^-. Um parâmetro mais natural para o S^1 é o *ângulo*, que passamos a descrever no fim da seção 3.

3 Mudança de coordenadas

Sejam $M = M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e $\varphi\colon U_0 \to U$ uma parametrização do aberto $U \subset M$. Os pontos de U são determinados por m quantidades (ou parâmetros):

$$(x^1, \ldots, x^m) \in U_0 \mapsto p = \varphi(x^1, \ldots, x^m) \in U.$$

Se V_0 é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^m$ e $\xi\colon V_0 \to U_0$ é um difeomorfismo de classe C^k, então

$$\varphi \circ \xi\colon V_0 \to U$$

é ainda uma parametrização de U. A aplicação ξ é normalmente denominada uma *mudança de coordenadas* (Fig. 2.6).

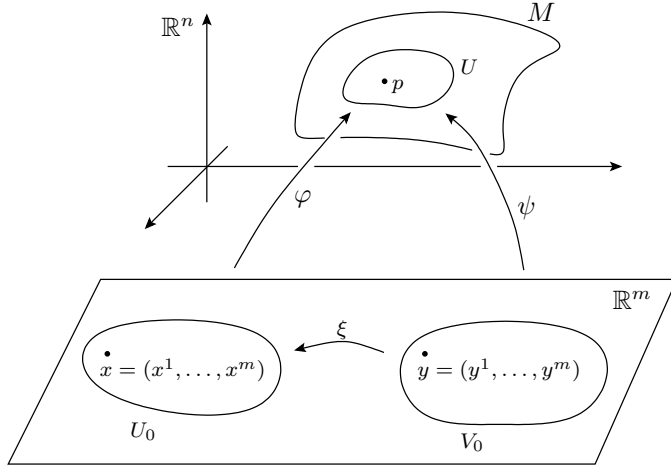



Figura 2.6.

Mostremos agora que esta é a única maneira de obter novas parametrizações de U.

Se $\varphi\colon U_0 \to U$ e $\psi\colon V_0 \to V$ são parametrizações em M tais que $U \cap V \neq \varphi$, é evidente que a aplicação

$$\xi = \psi^{-1} \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$$

é um homeomorfismo entre abertos do $\mathbb{R}^m$.

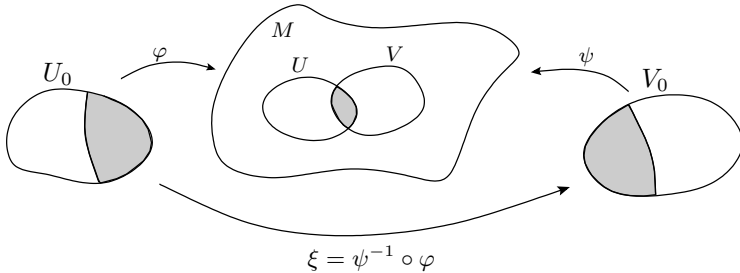



Figura 2.7.

Mas não se pode concluir de imediato a diferenciabilidade de $\psi^{-1} \circ \varphi$, visto que ψ^{-1} não está definida num aberto do $\mathbb{R}^n$. Para

contornar esta dificuldade, apresentamos o seguinte resultado, que dá conta de uma situação um pouco mais geral.

Proposição 1. *Sejam V_0 um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^m$ e $\psi\colon V_0 \to V$ uma parametrização de classe C^k do conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$. Dados $U_0 \subset \mathbb{R}^r$, aberto, e $f\colon U_0 \to V \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^k, então:*

(i) *a composta $\psi^{-1} \circ f\colon U_0 \to V_0 \subset \mathbb{R}^m$ é de classe C^k*

(ii) *para $x \in U_0$ e $z = \psi^{-1} \circ f(x)$ temos $(\psi^{-1} \circ f)'(x) = [\psi'(z)]^{-1} \circ f'(x)$.*

Demonstração: (i) Como $\psi\colon V_0 \to V$ é uma imersão (injetora) C^k, para cada ponto $p \in V$ existem um aberto Z em $\mathbb{R}^n$ que o contém e uma aplicação de classe C^k, $g\colon Z \to \mathbb{R}^m$, tal que $g|(V \cap Z) = \psi^{-1}$ (v. observação da seção 9 do Cap. I).

Seja p um ponto arbitrário de $f(U_0) \subset V$. Então $\psi^{-1} \circ f = g \circ f\colon f^{-1}((U_0) \cap Z) \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$. Resulta então que $\psi^{-1} \circ f$ é de classe C^k, pois f e g o são.

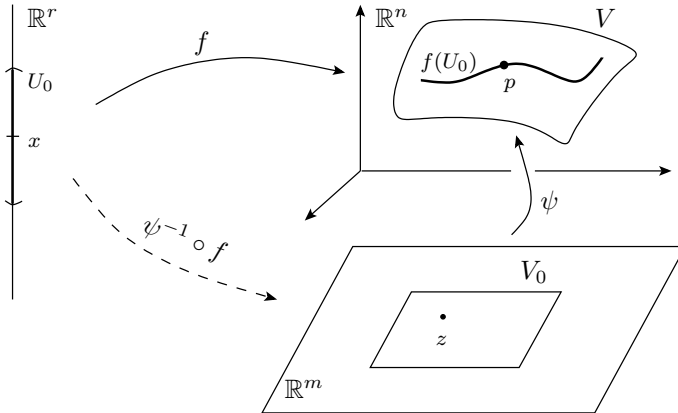



Figura 2.8.

(ii) Ponha $h = \psi^{-1} \circ f$ e aplique a regra da cadeia à igualdade $\psi \circ h = f$.

Corolário. *Sejam* U_0 *e* V_0 *subconjuntos abertos em* $\mathbb{R}^m$ *e* $\varphi\colon U_0 \to V$, $\psi\colon V_0 \to V$ *parametrizações de classe* C^k *do mesmo conjunto* $V \subset \mathbb{R}^n$. *Então a mudança de coordenadas* $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi$ *é um difeomorfismo de classe* C^k.

O Corolário acima permite estender o conceito de aplicação diferenciável, até agora só definido no caso em que o domínio era um aberto do espaço euclidiano.

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k. Diremos que uma aplicação $f\colon M \to \mathbb{R}^s$ é *diferenciável* num ponto $p \in M$ quando existe uma parametrização $\varphi\colon U_0 \to U$, de classe C^k, com $p \in U$, tal que $f \circ \varphi\colon U_0 \to \mathbb{R}^s$ é diferenciável no ponto $p_0 \in U_0$, onde $\varphi(p_0) = p$. Segue-se da Proposição 1 que $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ é diferenciável no ponto $\varphi^{-1}(p)$, seja qual for a parametrização ψ, de classe C^k, de uma vizinhança de p. Esta definição não depende, portanto, da parametrização φ escolhida.

Vê-se facilmente como estender à aplicação $f\colon M^m \to \mathbb{R}^s$ a noção de *classe* C^k. Observa-se, porém, que tal noção tem sentido apenas quando M é uma superfície de classe C^k. Do contrário, $f \circ \varphi$ pode ser de classe C^k para uma certa parametrização φ sem que o seja para outras.

Se tivermos $M^m \subset \mathbb{R}^r$ e $N^n \subset \mathbb{R}^s$ superfícies de classe C^k, diremos que $f\colon M \to N$ é *diferenciável* no ponto $p \in M$ quando, considerada como aplicação de M em $\mathbb{R}^s$, f for diferenciável naquele ponto.

Analogamente se define $f\colon M^m \to N^n$ de classe C^k: para cada $p \in M$ deve existir uma parametrização $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$, de classe C^k, com $p \in U$, tal que $f \circ \varphi\colon U_0 \to N \subset \mathbb{R}^s$ seja de classe C^k. Pela Proposição 1, $f \circ \varphi \in C^k$ seja qual for a parametrização $\varphi\colon U_0 \to U$, de classe C^k, com $p \in U$.

Observemos o seguinte: a fim de que $f\colon M \to N$ *seja de classe* C^k *é necessário e suficiente que, para todo* $p \in M$ *existam para-*

metrizações C^k, $\psi\colon V_0 \to V \subset N$ e $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$, com $p \in U$, $f(U) \subset V$ *e tais que* $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U_0 \to V_0 \subset \mathbb{R}^n$ *seja de classe* C^k.

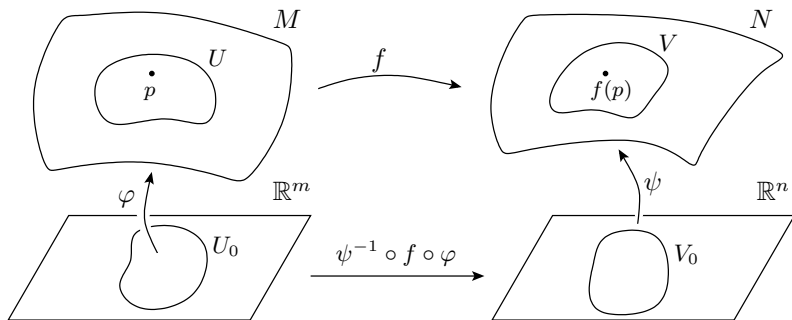



Figura 2.9.

Demonstração: Seja $f\colon M \to N$ de classe C^k. Dado $p \in M$, tomemos uma parametrização $\psi\colon V_0 \to V \subset N$ de classe C^k, com $f(p) \in V$, $V_0 \subset \mathbb{R}^n$. Como f é contínua, existe uma parametrização $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$, com $p \in U$, tal que $f(U) \subset V$. Por definição de $f \in C^k$, vemos que $f \circ \varphi\colon U_0 \to V \subset \mathbb{R}^s$ e de classe C^k. Em virtude da Proposição 1, segue-se que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U_0 \to V_0 \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^k. A recíproca é deixada a cargo do leitor.

Corolário. *Se* $f\colon M \to N$ *e* $g\colon N \to P$ *são de classe* C^k *então* $g \circ f\colon M \to P$ *é de classe* C^k.

Por exemplo, se $M^m \subset \mathbb{R}^r$ é uma superfície de classe C^k, então a aplicação da inclusão $i\colon M^m \to \mathbb{R}^r$ é de classe C^k. Do mesmo modo, se $M^m \subset W$, onde W é um aberto em $\mathbb{R}^r$, a aplicação de inclusão $i\colon M \to W$ também é de classse C^k. Se $f\colon W \to \mathbb{R}^s$ for de classe C^k, então a restrição $f|M\colon M \to \mathbb{R}^s$ será de classe C^k (estamos supondo $M \in C^k$!) pois $f|M = i \circ f$, logo podemos aplicar o Corolário.

Exemplo - (O ângulo como parâmetro em S^1.)

A *aplicação exponencial* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ é o homomorfismo do grupo aditivo dos reais no grupo multiplicativo dos números complexos, dado por

$$\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto e^{it} = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

A exponencial ξ é uma imersão C^∞ não-injetora, pois $\xi'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t) \neq 0$ para todo t, e $\xi(s) = \xi(t)$ se, e só se, $s - t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Intuitivamente, ξ enrola a reta em torno de S^1, sem esticá-la, no sentido anti-horário. O número t é uma determinação do ângulo (em radianos) que $\xi(t) \in S^1$ faz com o semi-eixo positivo dos x.

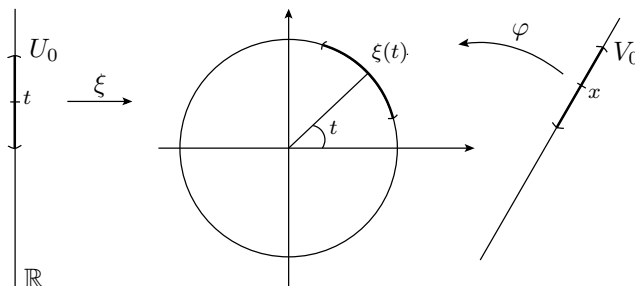



Figura 2.10.

Seja $t \in \mathbb{R}$, arbitrário, porém fixo neste raciocínio. Seja φ uma parametrização C^∞ de uma vizinhança de $\xi(t) \in S^1$, com $\varphi(x) = \xi(t)$ (φ pode ser uma das parametrizações anteriormente construídas). Como $[\varphi^{-1} \circ \xi]'(t) = [\varphi'(x)]^{-1} \circ \xi'(t) \neq 0$, o teorema da função inversa garante que $\varphi^{-1} \circ \xi$ é um difeomorfismo de uma vizinhança U_0 de $t \in \mathbb{R}$ sobre uma vizinhança V_0 de $x \in \mathbb{R}$ (Fig. 2.6). Conseqüentemente, $\xi = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \xi)\colon U_0 \to \xi(U_0)$ é um homeomorfismo. Em outras palavras, a exponencial $\xi\colon \mathbb{R} \to S^1$ é um homeomorfismo local. A conclusão é que em cada intervalo

aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ com $b - a \leq 2\pi$, a exponencial

$$\xi\colon (a, b) \to S^1$$

é uma parametrização do círculo. Ela é geometricamente mais significativa que as parametrizações $\varphi_i^{\pm}$ descritas anteriormente.

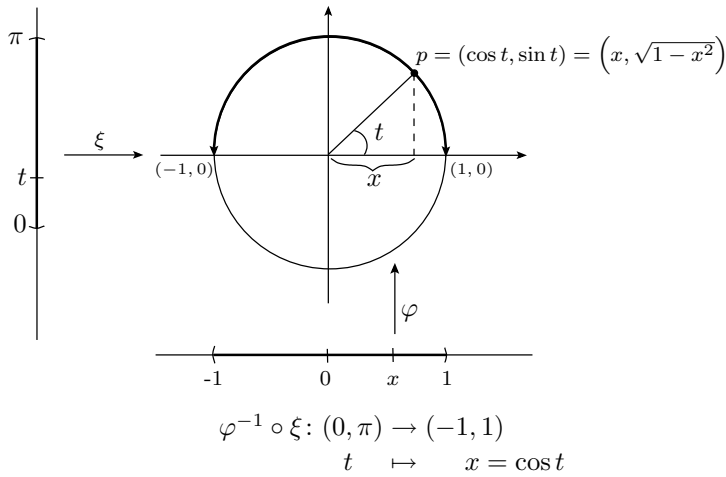



Figura 2.11.

4 O espaço tangente

Uma característica importante das superfícies diferenciáveis é que elas possuem, em cada ponto, uma aproximação linear, que é seu plano tangente.

Sejam $M = M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k $(k \geq 1)$. Seja $\varphi\colon U_0 \to U$ uma parametrização com $p = \varphi(x) \in M$, $x \in U_0$. O *espaço tangente* a M no ponto p é o espaço vetorial de dimensão m

$$TM_p = \varphi'(x) \cdot \mathbb{R}^m.$$

Os vetores $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) = \varphi'(x) \cdot e_i$, $i = 1, \ldots, m$ formam uma base de TM_p.

Esta definição só terá utilidade se mostramos que o espaço tangente em p independe da escolha da parametrização φ. Seja $\psi \colon V_0 \to V$ uma outra parametrização em p. Seja $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi \colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ a mudança de coordenadas, como $p = \varphi(x) = \psi(z)$. Ora, ξ é difeomorfismo, logo $\xi'(x) \cdot \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$. Finalmente, pela regra da cadeia, temos

$$\varphi'(x) \cdot \mathbb{R}^m = \psi'(z) \cdot \xi'(x) \cdot \mathbb{R}^m = \psi'(z) \cdot \mathbb{R}^m.$$

A proposição abaixo dá uma caracterização para TM_p que é bastante significativa por seu conteúdo geométrico:

Proposição 2. *Os elementos de TM_p são os vetores-velocidade em p dos caminhos diferenciáveis contidos em M que passam por p. Mais precisamente,*

$$TM_p = \{v = \lambda'(0);\, \lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n \text{ diferenciável, } \lambda(0) = p\}.$$

Demonstração: Seja $v \in TM_p$. Por definição do espaço tangente TM_p, existe uma parametrização $\varphi\colon U_0 \to U$ com $\varphi(x) = \varphi$ tal que

$$v = \varphi'(x) \cdot u = \lim_{t \mapsto 0} \frac{\varphi(x+tu) - \varphi(x)}{t}, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a imagem do caminho $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \to x + tu \in \mathbb{R}^m$ está toda contida em U_0. Assim v é o vetor velocidade em $t = 0$ do caminho em M, $\lambda(t) = \varphi(x + tu)$, $\lambda(0) = p$.

Por outro lado, seja $\lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ um caminho diferenciável com $\lambda(0) = p$. Consideremos uma qualquer parametrização $\varphi\colon U_0 \to U$ tal que $p \in U$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda(t) \in U$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então, pela Proposição 1, o caminho $\varphi^{-1} \circ \lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U_0 \subset \mathbb{R}^m$ é diferenciável e, escrevendo $u = (\varphi^{-1} \circ \lambda)'(0)$, temos $u = [\varphi'(x)]^{-1} \cdot \lambda'(0)$. Portanto $\lambda'(0) = \varphi'(x) \cdot u$, como queríamos demonstrar.

O espaço vetorial tangente TM_p é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e, por conseguinte, passa pela origem. Nas ilustrações geométricas, porém, sempre desenhamos a *variedade afim tangente* $p+TM_p$ que e paralela a TM_p e passa por p.

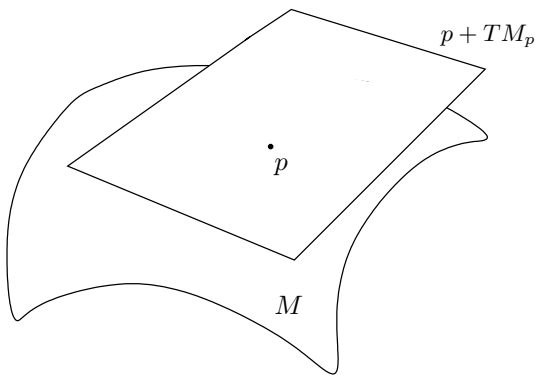



Figura 2.12.

O espaço tangente em um ponto de uma superfície de dimensão zero consiste apenas do vetor zero. O espaço tangente TU_p a uma superfície de dimensão n, $U \subset \mathbb{R}^n$, é igual a todo o $\mathbb{R}^n$.

O espaço tangente $(TS^n)_p$ à esfera unitária S^n consiste em todos os vetores $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ que são perpendiculares a p. De fato,

$$p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle v, p\rangle = 0\}$$

é um subespaço vetorial de dimensão n do $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, se $v \in (TS^n)_p$, então $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^n$ é um caminho diferenciável com $\lambda(0) = p$. Diferenciando a identidade $\langle \lambda(t), \lambda(t)\rangle = 1$, obtemos

$$2\langle \lambda'(t), \lambda(t)\rangle = 0,$$

e, pondo $t = 0$, vem $\langle v, p\rangle = 0$. Portanto $(TS^n)_p \subset p^\perp$. Como o espaço tangente a S^n em p tem dimensão n, resulta que

$$(TS^n)_p = p^\perp.$$

Terminamos esta seção definindo o referencial móvel associado a uma parametrização.

Sejam $M = M^m$ uma superfície de classe C^k em $\mathbb{R}^n$, e $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$ uma parametrização em M. Denominamos referencial móvel associado a φ no ponto $p = \varphi(x)$ ao conjunto

$$\mathcal{B}_\varphi(x) = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^m}(x) \right\}$$

base do espaço tangente a M no ponto p. Um vetor tangente $v \in TM_p$ se escreve da forma $v = \sum \alpha_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x)$. Consideremos o problema de determinar as coordenadas de v com respeito a uma nova base $\mathcal{B}_\psi(y)$, originada de outra parametrização $\psi\colon V_0 \to V$ tal que $\psi(y) = p$.

Seja ξ a mudança de coordenadas, isto é,

$$\varphi\big|[\varphi^{-1}(U \cap V)] = \psi \circ \xi.$$

Então

$$\varphi'(x) = \psi'(y) \cdot \xi'(x) \qquad \text{(regra da cadeia) e}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}(x) = \varphi'(x) \cdot e_j &= \psi'(y) \cdot (\xi'(x) \cdot e_j) \\
&= \psi'(y) \cdot \sum_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(x) \cdot e_i \\
&= \sum_i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j}(x) \cdot \psi'(y) \cdot e_i \\
&= \sum_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y^i}(x).
\end{aligned}$$

A relação acima mostra que a matriz de passagem da base $\mathcal{B}_\psi(x)$ para a base $\mathcal{B}_\psi(y)$ de TM_p é a matriz jacobiana de ξ no ponto x.

Podemos resumir tudo isto nas equações

$$\begin{aligned}
v &= \sum \alpha_i \, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) = \sum \, \beta_i \, \frac{\partial \psi}{\partial y^i}(y) \\
\beta_i &= \sum_j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(x) \cdot \alpha_j \, .
\end{aligned}$$

5 Como obter superfícies

Seja M um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se queremos mostrar que M é uma superfície, é necessário obtermos parametrizações de vizinhanças de todos os pontos de M; esta tarefa, requerida pela definição, pode vir a ser trabalhosa. Nesta seção apresentamos outras maneiras de se obterem superfícies.

5.1 O gráfico de uma aplicação C^k.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k. Então o gráfico de f,

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in U\}$$

é uma superfície de dimensão m e classe C^k no $\mathbb{R}^{m+n}$.

Realmente, $\varphi\colon U \to G(f)$, $\varphi(x) = (x, f(x))$, é uma parametrização de todo o conjunto $G(f)$.

É claro que nem toda superfície é um gráfico: a esfera S^n, por exemplo, não o é. Generalizando, nenhuma superfície compacta pode ser, globalmente, um gráfico.

Localmente, toda superfície de classe C^k é o gráfico de uma aplicação da mesma classe. Provemos isto.

Proposição 3. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k. Então todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança V, parametrizada por uma aplicação de classe C^k $\psi\colon V_0 \to V$, da forma $\psi(y) = (y, f(y))$, $y \in V_0 \subset \mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Seja $\varphi\colon U_0 \subset \mathbb{R}^m \to U \subset M$ uma parametrização de uma vizinhança U de $p = \varphi(x)$. Escolhamos uma decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ de tal modo que a primeira projeção $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leve TM_p isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$ (Lema 2, seção 10 do Cap. I). Seja $\eta = \pi \circ \varphi\colon U_0 \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Então $\eta'(x) = \pi \circ \varphi'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, η é um difeomorfismo C^k de uma vizinhança menor, $U_1 \ni x$, sobre uma vizinhança $V_0 \ni \pi(p)$. Indiquemos com $\xi = \eta^{-1}\colon V_0 \to U_1$ o difeomorfismo inverso. Então $\psi = \varphi \circ \xi\colon V_0 \subset \mathbb{R}^m \to V = \psi(v_0) \subset \mathbb{R}^n$ é uma nova parametrização de uma vizinhança de p. Da relação

$$\pi \circ \psi = \pi \circ (\varphi \circ \xi) = (\pi \circ \varphi) \circ \xi = \eta \circ \xi = \mathrm{id}_{V_0}$$

segue-se que a primeira coordenada de $\psi(y)$, relativa à decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, é y. Chamemos $f(y)$ a segunda coordenada. Então $\psi(y) = (y, f(y))$, $y \in V_0$. Nota-se que $\psi = (\pi|V)^{-1} \colon V_0 \to V$, isto é, a parametrização que faz de V um gráifco é simplesmente a inversa local da projeção $\pi \colon \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ que leva TM_p sobre $\mathbb{R}^m$ isomorficamente.

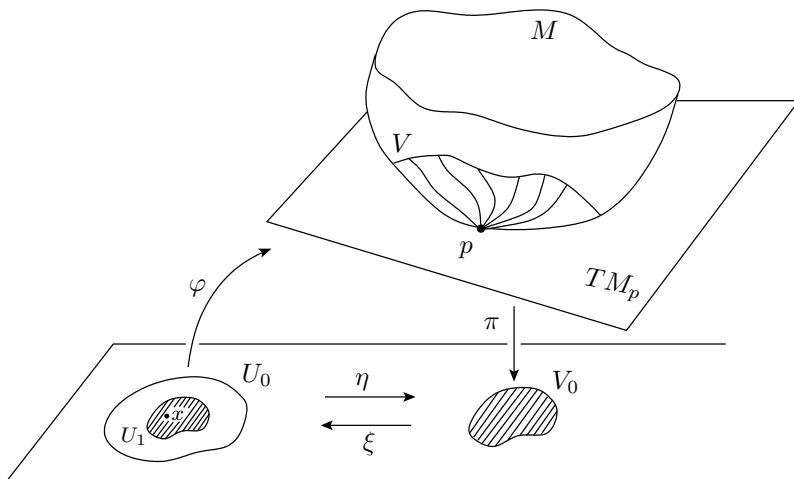



Figura 2.13.

5.2 Superfícies definidas implicitamente.

Seja $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Então $f \in C^\infty$, e a esfera unitária S^2 fica definida implicitamente pela equação $f(x, y, z) = 1$. Se $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, então $g^{-1}(c)$ é uma superfície de classe C^∞ para cada $c \neq 0$ (um hiperbolóide de uma folha para $c > 0$, um hiperbolóide de duas folhas para $c < 0$). Por outro lado a equação $g(x, y, z) = 0$ define um par de cones com vértice comum. Por um argumento topológico (conexão) vê-se que nenhuma vizinhança aberta do vértice $0 = (0, 0, 0)$ em

$g^{-1}(0)$ é homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^2$. Logo $g^{-1}(0)$ não é uma superfície.

O teorema abaixo dá condições suficientes para que a equação $f(x) = c$ defina uma superfície.

Proposição 4. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k. Seja $c \in \mathbb{R}^n$. Consideremos o conjunto*

$$M = \{p \in U . f(p) = c \ \textit{e} \ f'(p)\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n \ \textit{é sobrejetora}\}$$

Então

(i) *M é aberto em $f^{-1}(c)$.*

(ii) *Supondo que M é não vazio, M é superfície de dimensão m e classe Ck do $\mathbb{R}^{m+n}$, e*

(iii) *$(TM)_p = \operatorname{Ker} f'(p)$ para todo $p \in M$.*

Demonstração: (i) imediato. (ii) Seja $p \in M$.

Pelo teorema as funções implícitas (seção 8 do Cap. I), existem uma decomposição $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ com $p = (x_0, y_0)$, vizinhanças $p \in Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$, e uma aplicação $\xi\colon V \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k, tal que $G(\xi) = Z \cap f^{-1}(c)$. Assim $\varphi\colon V \to Z \cap f^{-1}(c)$, dada por $\varphi(x) = (x, \xi(x))$ é uma parametrização de classe C^k de uma vizinhança aberta de $p \in f^{-1}(c)$. Pela Observação 2, seção 8 do Cap. I, vem $Z \cap f^{-1}(c) \subset M$, o que conclui a demonstração de (ii).

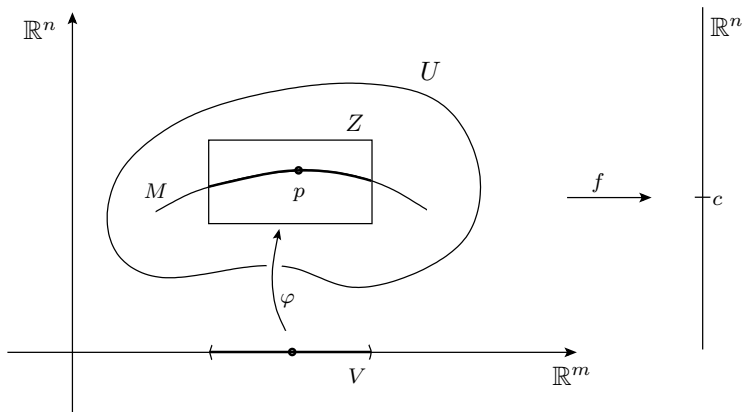



Figura 2.14.

(iii) Seja $v \in TM_p$. Consideremos um caminho $\lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Então $f'(p) \cdot v = f'(\lambda(0)), \lambda'(0) = (f \circ \lambda)'(0) = 0$, pois $f \circ \lambda$ é constante $(= c)$. Portanto $v \in \operatorname{Ker} f'(p)$. Como TM_p e $\operatorname{Ker} f'(p)$ são subespaços m-dimensionais do $\mathbb{R}^{m+n}$ e $TM_p \subset \operatorname{Ker} f'(p)$ segue-se que $TM_p = \operatorname{Ker} f'(p)$.

Observações:

1) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f\colon U\mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ chama-se *valor regular* de f quando, para cada $x \in U$ tal que $f(x) = c$, a derivada $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear sobrejetiva.

Se não existe $x \in U$ tal que $f(x) = c$ então c é trivialmente um valor regular de f. Quando $n = 1$, o funcional linear $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ou é zero ou é sobrejetiva. Neste caso o número real c é valor regular de f se, e somente se, $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in f^{-1}(c)$.

Por exemplo, seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Representando por (dx, dy, dz) a base canônica de $(\mathbb{R}^3)^*$, então $f'(x, y, z) = 2x\,dx + 2y\,dy - 2z\,dz$. Segue-se que $f'(x, y, z) = 0$ somente para $x = y = z = 0$; como $f(0, 0, 0) = 0$, vemos que $0 \in \mathbb{R}$ é o único valor não-regular de f.

O teorema que acabamos de provar se reescreve da seguinte maneira, tendo em vista a definição de valor regular:

Teorema 1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^k, $k \geq 1$. Se $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ é um valor regular de f, ou bem $f^{-1}(c)$ é vazio ou bem é uma superfície m-dimensional de classe C^k em $\mathbb{R}^n$. Além disso, para cada $p \in f^{-1}(c)$, o espaço tangente $T[f^{-1}(c)]_p$ é o núcleo de $f'(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$.*

Observações:

2) A imagem inversa $f^{-1}(c)$ pode ser uma superfície sem que c seja um valor regular. Por exemplo, seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^2$. $0 \in \mathbb{R}$ não é valor regular de f mas $f^{-1}(0) =$ eixo dos x é uma superfície C^∞ de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$.

3) Mesmo quando $c \in \mathbb{R}^n$ não é valor regular de $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, o primeiro enunciado do teorema garante que $M = f^{-1}(c) \cap \{p \in U; f'(p) \text{ é sobrejetiva}\}$ é uma superfície. Convém notar que M não é necessariamente denso em $f^{-1}(c)$. Por exemplo, seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 y$. Como $f'(x, y) = 2xy\,dx + x^2\,dy$, $f'(p) = 0$ se, e só se, p está no eixo dos y.

Neste exemplo a imagem inversa de $0 \in \mathbb{R}$ é a união dos eixos coordenados x e y (não é superfície), enquanto que M consiste no eixo dos x menos a origem.

Localmente, qualquer superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^k $(k \geq 1)$, pode ser definida implicitamente, isto é, como imagem inversa de um valor regular de uma aplicação de classe C^k. Mais precisamente:

Proposição 5. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k $(k \geq 1)$. Para cada ponto $p \in M$, existe um aberto Ω em $\mathbb{R}^n$, contendo p, e uma aplicação $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n-m}$, de classe C^k, tal que $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é um valor regular de g e $M \cap \Omega = g^{-1}(0)$.*

Demonstração: Pela Proposição 3, dado $p \in M$, existe uma decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ em soma direta e uma vizinhança aberta U de p em M tal que a projeção $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (relativa à decomposição acima) aplica U homeomorficamente sobre um aberto $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ e $\varphi = (\pi|U)^{-1} \colon U_0 \to U$ é uma parametrização de classe C^k tendo-se evidentemente $\varphi(x) = (x, f(x))$, onde $f \colon U_0 \to \mathbb{R}^{n-m}$ é de classe C^k. Ponhamos $\Omega = U_0 \times \mathbb{R}^{n-m}$. Então Ω é aberto em $\mathbb{R}^n$. Definamos $g \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n-m}$ por $g(x,y) = f(x) - y$. É imediato que $U = \Omega \cap M = f^{-1}(0)$. Além disso, em cada ponto $(x,y) \in \Omega$, a derivada $g'(x,y) \colon \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ é dada por $g'(x,y) \cdot (u,v) = f'(x) \cdot u - v$. Para qualquer $v \in \mathbb{R}^{n-m}$, temos $v = g'(x,y) \cdot (0,-v)$, logo g é uma submersão. Em particular, $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é um valor regular de g.

6 Exemplos de superfícies

1) **A esfera S^n definida implicitamente**.

Seja $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle x, x \rangle$. Como $f'(x) \cdot h = 2\langle x, h \rangle$, todo real não nulo c é valor regular de $f \in C^\infty$. Se $c < 0$ então $f^{-1}(c)$ é vazio. Se $c > 0$ então $f^{-1}(c)$ é a esfera de dimensão n com centro na origem $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ e raio c. O espaço tangente a esta esfera no ponto p é o núcleo de $f'(p)$, a saber, o conjunto de todos os vetores $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $\langle p, v \rangle = 0$, ou seja, o hiperplano perpendicular a p.

2) **O toro de dimensão** 2

Seja $U = \mathbb{R}^3 - \{\text{eixo dos } z\}$. A função $f \colon U \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2$, é de classe C^∞. A derivada $f'(p)$ é $\neq 0$ para todo $p = (x,y,z)$ fora do círculo $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$. Quando $p \in S$, $f'(p) = 0$. Portanto $0 \in \mathbb{R}$ é o único valor não-regular de f. para $0 < c < 4$, $f^{-1}(c)$ é

o toro gerado pela rotação de um círculo de raio $\sqrt{c}$ cujo centro percorre S.

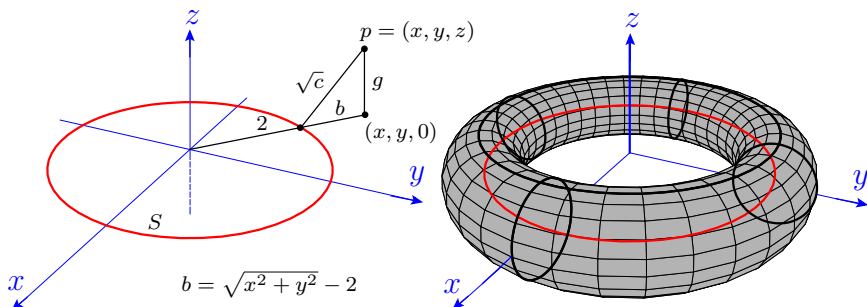



Figura 2.15.

O leitor deve tentar imaginar a forma das superfícies (desconexas e não-compactas) $f^{-1}(c)$ quando $c \geq 4$.

O toro $T^2 = f^{-1}(i)$ é também a imagem da aplicação $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(s,t) = 2u(t) + v(s,t)$, onde $u(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ e $v(s,t) = (\cos s \cdot \cos t, \cos s \cdot \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} s)$. Se $I, J \subset \mathbb{R}$ são dois intervalos abertos de comprimento 2π então $g\colon I \times J \to R^2$ é uma parametrização C^∞ de um subconjunto aberto de T^2.

3) **Matrizes de posto constante**

Seja $M(m \times n; \mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais $m \times n$ e indiquemos com $M(m \times n; k) \subset M(m \times n, \mathbb{R})$ o subconjunto formado pelas matrizes $m \times n$ de posto k. Isto significa que cada matriz $X \in M(m \times n, k)$ tem um menor $k \times k$ que é $\neq 0$, mas todos os seus menores de ordem $> k$ são nulos.

Vamos mostrar que $M(m \times n, \mathbb{R})$ é uma superfície de classe C^∞ e dimensão $k \cdot (m + n - k)$ em $M(m \times n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{mn}$.

Escrevamos as matrizes $X \in M(m \times n; \mathbb{R})$ em blocos $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, onde A é $k \times k$, B é $k \times (n-k)$, C é $(m-k) \times k$ e D

é $(m-k)\times(n-k)$.

Seja $W=\{X\in M(m\times n,\mathbb{R}); \det A\neq 0\}$. É evidente que W é aberto em $\mathbb{R}^{mn}$.

Afirmação: $W\cap M(m\times n;k)=\{X\in W \mid D=CA^{-1}B\}$. De fato, o posto de $X=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ é igual ao posto do produto

$$\begin{pmatrix} I_k & 0\\ -CA^{-1} & I_{m-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente, o posto de X é k se, e somente se, $D-CA^{-1}$=0.

Parametrizamos $U=W\cap M(m\times n;k)$ por meio da aplicação de classe C^∞, $\varphi\colon U_0\to U$, definida no aberto

$$U_0=\left\{(A,B,C)\in\mathbb{R}^{k^2}\times\mathbb{R}^{k(n-k)}\times\mathbb{R}^{(m-k)\times k}; \det A\neq 0\right\}$$

e dada por $\varphi(A,B,C)=\begin{pmatrix} A & B\\ C & CA^{-1}B\end{pmatrix}$.

É claro que φ é uma parametrização pois $\pi\circ\varphi=\mathrm{id}$, onde

$$\pi\colon \begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\mapsto (A,B,C).$$

Se $X\in M(m\times n;k)$ é arbitrária, existe um difeomorfismo de classe C^∞, $h\colon M(m\times n,\mathbb{R})\to M(m\times n,\mathbb{R})$, que deixa $M(m\times n,k)$ invariante e tal que $h(X)\in U$. (h é, por exemplo, uma conveniente troca de linhas e de colunas). Então $X\in h^{-1}(W)\cap M(m\times n,k)$ e $h^{-1}\circ\varphi$ é uma parametrização C^∞ de $h^{-1}(U)=h^{-1}(W)\cap M(m\times n;k)$.

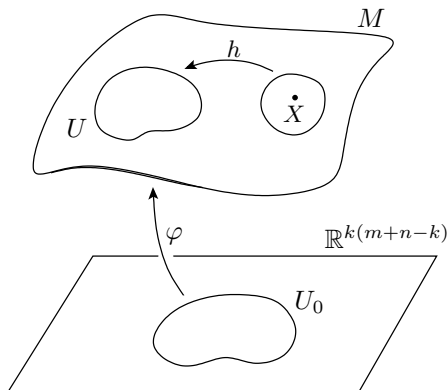



Figura 2.16.

4) **O grupo especial linear ou unimodular**

Identificamos o espaço vetorial $M(n \times p, \mathbb{R})$ das matrizes reais com n linhas e p colunas com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{np}$.

Se A é uma matriz $n \times p$, representamos por $A^1, \ldots, A^p$ os vetores-coluna de A. O espaço $M(n \times p, \mathbb{R})$ tem uma base canônica $\{E_{r,s}\,; 1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq p\}$: o elemento (r,s) de $E_{r,s}$ é igual a 1 e os restantes são nulos.

Se $A = (a^i_j) \in M(n, \mathbb{R})$, indicamos com A^r_s a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida de A pela eliminação da r-ésima linha e s-ésima coluna.

O *grupo linear* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ é o subconjunto aberto de $M(n, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes invertíveis ou, equivalentemente, pelas matrizes com determinante diferente de zero.

A função real $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \approx M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞, pois $\det(X)$ é n-linear nos vetores colunas de X. Pela expressão geral da derivada de uma função n-linear, tem-se

$$\det{}'(X) \cdot H = \sum_{i=1}^{n} \det(X^1, \ldots, H^i, \ldots, X^n), \;\; X, H \in M(n, \mathbb{R}).$$

Em particular, para $X = I =$ matriz identidade $n \times n$,

$$\det'(I) \cdot H = \sum_i \det(e_1, \ldots, H^i, \ldots, e_n) = \sum_i h_i^i = \text{ traço de } H$$

e

$$\frac{\partial \det}{\partial x_s^r}(X) = \det'(X) \cdot E_{r,s} = (-1)^{r+s} \det X_s^r.$$

Consideremos a restrição $\det\colon \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Da expansão do determinante ao longo de uma linha (ou coluna), segue-se que, dada $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, existe algum menor $\det(A_s^r) \neq 0$. Isto mostra que $\det\colon \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é uma submersão de classe C^∞. Em outras palavras, todo real não-nulo c é valor regular de $\det \mid \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Conclui-se que o conjunto

$$\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n) = \{x \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n); \det X = 1\} = (\det)^{-1}(1)$$

é uma superfície de dimensão $n^2 - 1$ e classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n^2}$. $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ é chamado *grupo especial linear* ou *grupo unimodular*. Evidentemente,

$$X, Y \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \begin{cases} XY \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^n) \\ X^{-1} \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^n) \end{cases}.$$

Ou seja, $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, que é uma superfície C^∞. O espaço tangente a $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ em I é o conjunto de todas as matrizes de traço nulo, em virtude do Teorema 1 e de ser $\det'(I) \cdot H =$ traço de H.

5) **O grupo ortogonal**

Dada uma matriz $m \times n$, $X = (x_j^i)$, chama-se *transposta* de X à matriz $n \times m$ $X^* = (x_i^j)$, que se obtém de X trocando ordenadamente suas linhas por suas colunas.

A transposição goza das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
&X^{**} = X,\\
&(X+Y)^* = X^* + Y^*,\\
&(c\cdot X)^* = c\cdot X^*,\\
&(XY)^* = Y^* X^*,\\
&I^* = I,\\
&X \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow X^* \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n),\ (X^*)^{-1} = (X^{-1})^*.
\end{aligned}$$

Uma matriz real $n \times n$ X diz-se *simétrica* se $X^* = X$, e *anti-simétrica* se $X^* = -X$. As marizes simétricas e as matrizes anti-simétricas formam subespaços vetoriais $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ de $M(n,\mathbb{R})$, de dimensões $\frac{n}{2}(n+1)$ e $\frac{n}{2}(n-1)$, respectivamente.

Dada uma matriz arbitrária $X \in M(n,\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned}
&XX^*,\ X + X^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\\
&X - X^* \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n),\\
&X = \frac{1}{2}(X+X^*) + \frac{1}{2}(X - X^*).
\end{aligned}$$

Esta última identidade mostra que $M(n,\mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

O *grupo ortogonal* $O(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todas as matrizes reais $n \times n$, X, tais que $XX^* = I$. O leitor deve verificar que $O(\mathbb{R}^n)$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Geometricamente, um operador linear em $\mathbb{R}^n$ é uma isometria (isto é, preserva distâncias) se, e somente se, sua matriz com respeito à base canônica do $\mathbb{R}^n$ é ortogonal.

Vamos demonstrar que $O(\mathbb{R}^n)$ é uma superfície compacta de dimensão $\frac{n}{2}(n-1)$ e classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n^2}$.

Consideremos a aplicação de classe C^∞

$$f\colon M(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \approx R^{\frac{n}{2}(n+1)}, \quad f(X) = XX^*.$$

Se mostrarmos que $I \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é valor regular de f então, aplicando o Teorema 1, concluiremos que $O(\mathbb{R}^n) = f^{-1}(I)$ é superfície C^∞ de dimensão $n^2 - \dfrac{n}{2}(n+1) = \dfrac{n}{2}(n-1)$ em $\mathbb{R}^{n^2}$.

Seja portanto $X \in f^{-1}(I) = O(\mathbb{R}^n)$. Queremos provar que a derivada $f'(X)\colon M(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dada por $f'(X)\cdot H = XH^* + HX^*$, é sobrejetiva. Dada $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, seja $V = \dfrac{SX}{2}\cdot$ Então $f'(X)\cdot V = X\left(\dfrac{SX}{2}\right)^* + \left(\dfrac{SX}{2}\right)\cdot X^* = (XX^*)\dfrac{S}{2} + \dfrac{S}{2}XX^* = S.$

Nota. Para achar $V \in M(n,\mathbb{R})$ tal que $XV^* + VX^* = S$, apelamos para a sorte. Tentamos achar V tal que $XV^* = VX^* = \dfrac{S}{2}\cdot$ Esta última igualdade fornece imediatamente $V = \dfrac{SX}{2}\cdot$

Observemos que $O(\mathbb{R}^n)$ é subconjunto fechado de $M(n,\mathbb{R})$, por ser a imagem inversa de I pela função contínua f. Quando identificamos $M(n,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$, $O(\mathbb{R}^n)$ passa a ser subconjunto da esfera de centro em $O \in \mathbb{R}^{n^2}$ e raio $\sqrt{n}$, pois cada vetor linha de uma matriz $X \in O(\mathbb{R}^n)$ tem comprimento 1.

Portanto, o grupo ortogonal é fechado e limitado em $\mathbb{R}^{n^2}$, ou seja, é compacto.

O grupo ortogonal $O(\mathbb{R}^n)$ tem duas componentes conexas

$$O^+(\mathbb{R}^n) = \{X \in O(\mathbb{R}^n); \det X > 0\},$$
$$O^-(\mathbb{R}^n) = \{X \in O(\mathbb{R}^n); \det X < 0\}.$$

Esta afirmação equivale a dizer que, dadas duas matrizes ortogonais X e Y de determinante positivo, existe um caminho contínuo

$$\lambda\colon [0,1] \to O^+(\mathbb{R}^n)$$

tal que $\lambda(0) = X$ e $\lambda(1) = U$. Os Exercícios A), B) e C) abaixo fornecem um roteiro para a demonstração deste fato.

Em resumo, $O(\mathbb{R}^n)$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ que é uma superfície C^∞. O espaço tangente a $O(\mathbb{R}^n)$ em I é o núcleo de $f'(I)$, isto é, o subespaço de $M(n, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes anti-simétricas.

Note-se que $O^+(\mathbb{R}^2)$ é canonicamente isomorfo a S^1 pela correspondência $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercícios

A) Seja $\alpha\colon [a,b] \to M$ um caminho contínuo numa superfície diferenciável $M^m \subset \mathbb{R}^n$. Dada uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_m\} \subset TM_{\alpha(a)}$, existem aplicações contínuas $v_1, \dots, v_m \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tais que $v_1(a) = u_1, \dots, v_m(a) = u_m$ e, para cada $t \in [a,b]$, $\{v_1(t), \dots, v_m(t)\}$ é uma base ortonormal de $TM_{\alpha(t)}$.

[**Sugestão**: Existe uma partição finita de $[a,b]$ por meio de intervalos justapostos, em cada um dos quais α toma valores numa vizinhança parametrizada de M. Basta então considerar o caso em que $\alpha([a,b]) \subset U$ e existe uma parametrização $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$. Tome $p_0 \in U_0$ tal que $\varphi(p_0) = \alpha(a)$ e uma base $\{u_1^0, \dots, u_m^0\} \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\varphi'(p_0) \cdot u_i^0 = u_i$, $i = 1, \dots, m$. Defina $w_1, \dots, w_m \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ pondo $w_i(t) = \varphi'(\varphi^{-1}(\alpha(t))) \cdot u_i^0$ e obtenha $v_1, \dots, v_m$ ortonormalizando os w_i por Gram-Schmidt.]

B) Sejam $\{u_1, \dots, u_{m+1}\}$ e $\{w_1, \dots, w_{m+1}\}$ bases ortonormais positivas do espaço $\mathbb{R}^{m+1}$. Existem $m+1$ aplicações contínuas $v_1, \dots, v_{m+1} \colon [0,2] \to \mathbb{R}^{m+1}$ tais que $v_i(0) = u_i$, $v_i(1) = w_i$ $(i = 1, \dots, m+1)$ e, para cada $t \in [0,2]$, $\{v_1(t), \dots, v_{m+1}(t)\}$ é uma base ortonormal (necessariamente positiva) de $\mathbb{R}^{n+1}$.

[**Sugestão**: Seja $v_{m+1} = \alpha\colon [0,1] \to S^m$ um caminho contínuo em S^m, ligando u_{m+1} a w_{m+1}. Usando o exercício anterior, obtenha $v_1, \dots, v_m \colon [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínuas, com $v_i(0) = u_i$ e, para

cada $t \in [0,1]$, $B(t) = \{v_1(t), \ldots, v_m(t), \alpha(t)\}$ sendo uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{m+1}$. Por continuidade, $B(t)$ é positiva para todo $t \in [0,1]$. Usando indução, obtenha caminhos contínuos $v_1, \ldots, v_m \colon [1,2] \to (TS^m)_{v_{m+1}} = \mathbb{R}^m$ começando com $\{v_1(1), \ldots, v_m(1)\}$ e terminando com $\{w_1, \ldots, w_m\}$, mantendo-se sempre ortonormais.]

C) O grupo $O(\mathbb{R}^m)$ possui duas componentes conexas.

[**Sugestão**: As colunas de uma matriz ortogonal $m \times m$, de determinante positivo, constituem uma base ortonormal positiva do espaço $\mathbb{R}^m$.]

7 Grupos e Álgebras de Lie de matrizes

Um subgrupo $G \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ chama-se um *grupo de Lie* (de matrizes) quando é uma superfície C^∞ do espaço $M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Exemplos de grupos de Lie de matrizes são $O(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$. Evidentemente, o próprio $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ e o grupo trivial, reduzido à matriz identidade, são grupos de Lie.

Os grupos de Lie de matrizes são também chamados grupos de Lie *lineares*.

Dado um grupo de Lie de matrizes $G \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, o espaço vetorial tangente $(TG)_I$ a G no ponto $I =$ matriz identidade chama-se a *álgebra de Lie* do grupo G. Vejamos a explicação para este nome.

Dadas duas matrizes $n \times n$, A e B, chama-se *colchete de Lie* de A e B à matriz $n \times n$:

$$[A, B] = AB - BA.$$

A operação $(A, B) \to [A, B]$ entre matrizes $n \times n$ é bilinear,

isto é, satisfaz:

$$[A + A', B] = [A, B] + [A', B]$$
$$[A, B + B'] = [A, B] + [A, B']$$
$$[\alpha A, B] = \alpha[A, B] = [A, \alpha B].$$

Em vez de comutatividade, tem-se $[A, B] = -[B, A]$ (anti-comutatividade). Em vez de associatividade, tem-se a *identidade de Jacobi*

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0.$$

Estas propriedades seguem-se diretamente da definição.

Seja $\mathfrak{A} \subset M(n, \mathbb{R})$ um subespaço vetorial de matrizes $n \times n$, tal que $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow [A, B] \in \mathfrak{A}$. Nestas condições, $\mathfrak{A}$ chama-se uma *álgebra de Lie de matrizes*.

Evidentemente, o conjunto $M(n, \mathbb{R})$ de todas as matrizes reais $n \times n$ é uma álgebra de Lie. O mesmo ocorre com o subespaço formado pela única matriz 0.

Dada qualquer matriz quadrada A, tem-se $[A, A] = 0$ e portanto $[sA, tA] = st[A, A] = 0$, sejam quais forem os números reais s, t. Segue-se que todo subespaço vetorial $\mathfrak{A}$, de dimensão 1, de $M(n, \mathbb{R})$ é uma álgebra de Lie, na qual $[A, B] = 0$ sempre.

Seja $\mathfrak{A} = TO(\mathbb{R}^n)_I$ o espaço vetorial tangente ao grupo de Lie $O(\mathbb{R}^n)$ na matriz identidade. Sabemos que $\mathfrak{A}$ é o conjunto das matrizes anti-simétricas $n \times n$. É fácil verificar que o colchete de duas matrizes anti-simétricas ainda goza desta propriedade. Em outras palavras, $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow [A, B] \in \mathfrak{A}$. Portanto, $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Lie.

Da mesma maneira, se $=\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ então TG_I consiste das matrizes de traço nulo. Como $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, vemos que

$\operatorname{tr}([A,B]) = 0$ sejam quais forem $A, B \in M(n,\mathbb{R})$. Em particular, $A, B \in TG_I = [A,B] \in TG_I$, donde TG_I é uma álgebra de Lie.

Propomo-nos agora a demonstrar que, seja qual for o grupo de Lie de matrizes $G \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, o espaço vetorial tangente TG_I é uma álgebra de Lie de matrizes.

Para isso, usaremos a *exponencial* de uma matriz. Dada $A \in M(n,\mathbb{R})$, pomos

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

Demonstra-se em Álgebra Linear que esta série sempre converge e que, quando $AB = BA$, tem-se

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}.$$

Em particular, $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$, $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = I$, donde e^A é invertível, com $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Derivando termo a termo a série de potências, obtemos

$$\frac{d}{dt}\, e^{tA} = A \cdot e^{tA}.$$

Em particular, $f \colon R \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, definido por $f(t) = e^{tA}$, é um caminho C^∞ cujo vetor velocidade no ponto $t = 0$ é A. Um resultado mais preciso é o seguinte:

Lema. *Seja $G \subset M(n,\mathbb{R})$ um grupo de Lie de matrizes. Dada $A \in TG_I$, tem-se $e^{tA} \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

A demonstração deste lema será adiada para a seção seguinte. Aqui, o usaremos para demonstrar o resultado abaixo.

Proposição 6. *Seja G um grupo de Lie de matrizes. Dadas $A, B \in TG_I$, tem-se $[A,B] \in TG_I$. Em outras palavras, o espaço vetorial tangente a G na matriz identidade é uma álgebra de Lie.*

Demonstração: Para todo $t \in \mathbb{R}$, ponhamos $\alpha(t) = e^{tA}$ e $\beta(t) = e^{tB}$. Em virtude do Lema, temos $\alpha \in G$ e $\beta(t) \in G$ para todo t, logo podemos considerar o caminho $\lambda\colon [0,\infty) \to G$, definido por $\lambda(t) = \alpha(\sqrt{t})\beta(\sqrt{t})\alpha(-\sqrt{t})\beta(-\sqrt{t})$. Escrevendo

$$\alpha(t) = I + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \rho(t) \text{ e } \beta(t) = I + tB + \frac{t^2B^2}{2} + \sigma(t),$$

onde $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\rho(t)}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sigma(t)}{t^2} = 0$, um cálculo simples mostra que $\lambda(t) = I + t[A,B] + \varepsilon(t)$, onde $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varepsilon(t)}{t} = 0$. Logo, $\lambda'(0) = [A,B]$. Como $\lambda(t) \in G$ para todo $t \geq 0$, vemos que $[A,B] \in TG_I$.

Observemos, para finalizar, que o espaço vetorial tangente TG_{X_0} num ponto $X_0 \in G$ consiste em todas as matrizes X_0A, onde $A \in TG_I$. Com efeito, os caminhos diferenciáveis $\lambda\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to G$, com $\lambda(0) = X_0$ são os da forma $\lambda(t) = X_0 \cdot \mu(t)$, onde $\mu\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to G$ é diferenciável, com $\mu(0) = I$. Portanto $\lambda'(0) = X_0 \cdot \mu'(0) = X_0A$, $A \in TG_I$. Por motivo análogo, $TG_{X_0} = \{BX_0; B \in TG_I\}$.

8 Campos de vetores tangentes a uma superfície

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k. Um *campo de vetores* em M é uma aplicação $v\colon M \to \mathbb{R}^n$. Em conformidade com a definição geral (vide seção 3), diremos que o campo v é de *classe* C^r quando, para cada ponto $p \in M$, existe uma parametrização $\varphi\colon U_0 \to U$, de classe C^k, com $p \in U$, tal que $v \circ \varphi\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^r. No caso de ser $r \leq k$, seja qual for a parametrização $\psi\colon V_0 \to V$, de classe C^k, com $p \in V$, tem-se $v \circ \psi = (v \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$, logo $v \circ \psi \in C^r$. Assim, a noção de campo de classe C^r tem sentido intrínseco (isto é, não depende da

escolha da parametrização) desde que $r \leq k$, onde k é a classe da superfície M.

O campo $v\colon M \to \mathbb{R}^n$ diz-se *tangente* à superfície M quando $v(p) \in TM_p$ para todo $p \in M$.

Um subconjunto aberto $U \subset M$ é ainda uma superfície de classe C^k. Logo tem sentido considerar campos de vetores tangentes definidos em U. Em particular, se $\varphi\colon U_0 \to U$ é uma parametrização de classe C^k, um campo v de vetores tangentes de classe C^r em U fica determinado por uma aplicação $v_0\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$, de classe C^r, tal que $v_0(x) \in TM_{\varphi(x)}$ para todo $x \in U_0$, sendo o campo $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ definido a partir de v_0 por $v = v_0 \circ \varphi^{-1}$, isto é, $v(p) = v_0(x)$, $p = \varphi(x)$.

Por exemplo, dada a parametrização φ, os vetores $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^1}(x)$, $\ldots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^m}(x)$ constituem, para cada $x \in U_0$, uma base do espaço vetorial tangente TM_p, $p = \varphi(x)$. As aplicações $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\colon U_0 \to \mathbb{R}^n)$ $(j = 1, \ldots, m)$ são de classe C^{k-1} e por conseguinte os m campos de vetores tangentes $v_j\colon U \to \mathbb{R}^n$, definidos por $v_j(\varphi(x)) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}(x)$, são de classe C^{k-1} em U. Eles constituem o referencial móvel associado à parametrização φ.

Seja $v\colon M \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores tangentes. Em cada ponto $p = \varphi(x)$ da vizinhança parametrizada U o vetor $v(p)$ se escreve como combinação linear dos vetores básicos $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}(x) \in TM_p$ assim:

$$v(p) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(x), \quad p = \varphi(x).$$

Isto define m funções reais $\alpha^1, \ldots, \alpha^m\colon U_0 \to \mathbb{R}$. Mostraremos que, se $r \leq k-1$, então $v \in C^r$ se, e somente se, as funções $\alpha^1, \ldots, \alpha^m\colon U_0 \to \mathbb{R}$, acima definidas, são de classe C^r, para cada parametrização $\varphi\colon U_0 \to U$, de classe C^k. Mais geralmente, temos:

Proposição 7. *Sejam* $v_1, \ldots, v_m \colon M \to \mathbb{R}^n$ *campos vetoriais de classe* C^r $(r \leq k)$ *tangentes a uma superfície* $M^m \subset \mathbb{R}^n$*, de classe* C^k*, tais que, em cada ponto* $p \in M$*,* $\{v_1(p), \ldots, v_m(p)\}$ *é uma base de* TM_p*. Todo campo vetorial tangente* $v \colon M \to \mathbb{R}^n$ *se escreve, de modo único, em cada ponto* $p \in M$*, como* $v(p) = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i(p) v_i(p)$*. Isto define* m *funções reais* $\alpha^1, \ldots, \alpha^m : M \to \mathbb{R}$*. O campo* v *é de classe* C^r *se, e somente se, as funções* α^i *são de classe* C^r*.*

Demonstração: Se $\alpha^1, \ldots, \alpha^m \colon M \to \mathbb{R}$ são de classe C^r, é claro que $v = \Sigma\, \alpha^i v_i$ é de classe C^r. Reciprocamente, suponhamos $v \in C^r$. Para demonstrar que as funções α^i são de classe C^r, como se trata de um fato local, podemos admitir que se tem uma parametrização $\varphi \colon U_0 \to U$, de classe C^k, aplicações de classe C^r, $v, v_1, \ldots, v_m \colon U_0 \to \mathbb{R}^n$, $\alpha^1, \ldots, \alpha^m : U_0 \to \mathbb{R}$, tais que $\{v_1(x), \ldots, v_m(x)\}$ é uma base de $TM_{\varphi(x)}$ e

$$v(x) = \alpha^1(x) v_1(x) + \cdots + \alpha^m(x) v_m(x),$$

para todo $x \in U_0$. Sejam $V(x)$ a matriz $n \times m$ cujas colunas são os vetores $v_1(x), \ldots, v_m(x)$ e $A(x)$ o vetor coluna cujas coordenadas são $\alpha^1(x), \ldots, \alpha^m(x)$. As aplicações $x \mapsto V(x)$, $x \mapsto v(x)$ são de classe C^r em U_0. Em cada ponto $x \in U_0$, a matriz $V(x)$ possui uma submatriz $m \times m$ invertível. Restringindo, se necessário, o aberto U_0, podemos supor que esta matriz é a mesma em todos os pontos e, por simplicidade de notação, admitiremos que ela é formada pelas m primeiras colunas de $V(x)$, ou seja, que $V(x) = \begin{pmatrix} P(x) \\ Q(x) \end{pmatrix}$, onde $P(x)$ é $m \times m$ invertível e $Q(x)$ é $(n-m) \times m$. A aplicação $x \mapsto P(x)^{-1}$ é de classe C^r em U_0, o mesmo se dando com a aplicação $x \mapsto B(x)$, onde $B(x) = (P(x)^{-1}, 0)$ é uma matriz $m \times n$ cujas últimas $n - m$ colunas são nulas. Como $B(x) \cdot V(x) =$

matriz identidade $m \times m$, temos

$$A(x) = B(x) \cdot V(x) \cdot A(x) = B(x) \cdot v(x).$$

Logo $x \mapsto A(x) = (\alpha^1(x), \ldots, \alpha^m(x))$ é de classe C^r em U_0, como queríamos demonstrar.

Corolário. *Seja $r \leq k-1$. Um campo vetorial $v \colon M \to \mathbb{R}^n$, tangente a M, é de classe C^r se, e somente se, para cada parametrização $\varphi \colon U_0 \to U$, de classe C^k, e cada $p = \varphi(x) \in U$, tem-se $v(p) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j(x) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^j}(x)$, onde as funções $\alpha^1, \ldots, \alpha^m \colon U_0 \to \mathbb{R}$, assim definidas, são de classe C^r.*

Com efeito, dada φ, restrinjamos v ao aberto U, onde estão definidos os campos $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^j}\cdot$ Pela proposição anterior, $v \in C^r$ em U se, e somente se, as funções α^j são de classe C^r.

Vimos que, em cada vizinhança parametrizada U de uma superfície de classe C^k, existem campos de classe C^{k-1} que constituem uma base do espaço tangente em cada ponto de U. Mostraremos agora que o mesmo não ocorre com campos de classe C^k, a menos que a superfície já fosse de classe C^{k+1}.

Proposição 8. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k. Se cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança na qual se podem definir m campos tangentes linearmente independentes de classe C^k, então M é de classe C^{k+1}.*

Demonstração: Dado um ponto arbitrário $p_0 \in M$, mostraremos que existe uma vizinhança de p_0 que pode ser munida de uma parametrização de classe C^{k+1}. Por hipótese, podemos definir, numa vizinhança U de p_0, m campos $v_1, \ldots, v_m \colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k que constituem, em cada $p \in U$, uma base do espaço tangente TM_p. Seja $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ uma decomposição em soma direta tal que a projeção correspondente $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplique

TM_{p_0} isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$. Restringindo U, se necessário, podemos admitir que $\varphi = (\pi|U)^{-1}$ seja uma parametrização de classe C^k, definida em $U_0 = \pi(U)$. Para cada $x \in U_0$ e cada vetor $u \in \mathbb{R}^m$, o vetor $v = \varphi'(x) \cdot u \in TM_{\varphi(x)}$ é caracterizado, entre os vetores tangentes a M no ponto $\varphi(x)$, pela propriedade $\pi \cdot v = u$.

Para todo $x \in U_0$, seja $V(x)$ a matriz $n \times m$ cujas colunas são os vetores $v_1(\varphi(x)), \ldots, v_m(\varphi(x))$. Então $x \mapsto V(x)$ é de classe C^k em U_0 e cada matriz $V(x)$ tem posto m. Podemos admitir que $V(x) = \begin{pmatrix} P(x) \\ Q(x) \end{pmatrix}$, onde $P(x)$ é $m \times m$ invertível e $Q(x)$ é $(n-m)\times m$. A aplicação $x \mapsto P(x)^{-1}$ é de classe C^k em U_0. Pondo $B(x) = V(x) \cdot P(x)^{-1}$, como as colunas de $V(x)$ geram $TM_{\varphi(x)}$, vemos que as colunas de $B(x)$ também têm essa propriedade. Além disso, $x \mapsto B(x)$ é de classe C^k em U_0. Mas é claro que $B(x) = \begin{pmatrix} I_m \\ C(x) \end{pmatrix}$, onde I_m = matriz identidade $m \times m$. Logo, os vetores $w_1(x), \ldots, w_m(x)$, que constituem as colunas de $B(x)$, dependem de x em classe C^k e são tais que $\pi \cdot w_i(x) = e_i = i$-ésimo vetor básico de $\mathbb{R}^m$. Notando que os vetores $w_i(x)$ são tangentes a M no ponto $\varphi(x)$, segue-se que $w_i(x) = \varphi'(x) \cdot e_i$ para todo $x \in U_0$. Como as aplicações $x \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \varphi'(x) \cdot e_i$ são de classe C^k em U_0, para $i = 1, \ldots, m$, concluimos que a parametrização φ é de classe C^{k+1}, o que termina a demonstração.

A seguir, estenderemos para superfícies o teorema de existência e unicidade de curvas integrais de campos vetoriais, que foi demonstrado no Capítulo I para o caso de abertos no espaço euclidiano.

Dado um campo vetorial tangente $v\colon M^m \to \mathbb{R}^n$, uma *curva integral* de v, com origem num ponto $p \in M$, é um caminho diferenciável $\lambda\colon (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(t) = v(\lambda(t))$ para todo t.

Proposição 9. *Seja v um campo de vetores tangentes de classe C^{k-1} ($k \geq 2$) numa superfície $M^m \subset \mathbb{R}^r$ de classe C^k. Para cada ponto $p \in M$ existe uma curva integral de v em M, com origem p. Duas curvas integrais de v com origem p coincidem numa vizinhança de* 0.

Demonstração: Dado $p \in M$, seja $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$ uma parametrização C^k de uma vizinhança U de p em M. Definimos um campo de vetores $u\colon U_0 \to \mathbb{R}^m$, de classe C^k pela condição:

$$\varphi'(x) \cdot u(x) = v(\varphi(x)), \text{ para todo } x \in U_0\,.$$

A regra da cadeia mostra que $\mu\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U_0$ é uma curva integral de u com origem $p_0 = \varphi^{-1}(p)$ se, e somente se, $\varphi \circ \mu\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é uma curva integral de v com origem $p = \varphi(p_0)$. A Proposição 6 segue-se então da Proposição do Capítulo I.

Corolário 1. *Sejam $W \subset \mathbb{R}^r$ um aberto, $M^m \subset W$ uma superfície de classe C^k ($k \geq 2$) e $v\colon W \to \mathbb{R}^r$ um campo de vetores de classe C^{k-1} em W, tal que $v(p) \in TM_p$ para todo $p \in M$. Se $\lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^r$ é uma curva integral de v com origem num ponto $p \in M$ então existe $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta \Rightarrow \lambda(t) \in M$.*

Com efeito, a restrição de v a M é um campo de vetores tangentes a M, de classe C^k. Pela Proposição 6, para todo $p \in M$ existe uma curva integral de v, com origem p, contida em M. Por unicidade, essa curva é a restrição de λ a uma vizinhança de 0.

Corolãrio 2. *Seja $G \subset M(n, \mathbb{R})$ um grupo de Lie. Para toda matriz $A \in TG_I$, e todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se $e^{tA} \in G$.*

Dada A, consideremos o campo de vetores $v\colon \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \to M(n, \mathbb{R})$, definido por $v(X) = AX$. O caminho $\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, definido por $\lambda(t) = e^{tA} \cdot X$ é uma curva integral de v com origem X. Quando $x \in G$, tem-se $v(X) \in TG_X$. (Vide observação final da seção anterior.) Segue-se do Corolário 1 que, para cada $x \in G$,

existe $\varepsilon > 0$ tal que $e^{tA} \cdot X \in G$ sempre que $|t| < \varepsilon$. Em particular, tomando $X = I$, temos $e^{tA} \in G$ para $|t| < \varepsilon$. Dado qualquer t real, escrevemos $t = t_1 + \cdots + t_k$ com $|t_1| < \varepsilon, \ldots, |t_k| < \varepsilon$. Concluímos que $e^{t_i A} \in G$, $i = 1, \ldots, k$, e portanto (sendo G um grupo) $e^{tA} = e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A} \cdot \cdots \cdot e^{t_k A} \in G$.

Capítulo III

Vetores Normais, Orientabilidade e Vizinhança Tubular

Consideraremos, neste capítulo, o seguinte problema: quais são as superfícies de classe C^k, $M^m \subset \mathbb{R}^n$ que podem ser obtidas como imagem inversa $M^m = f^{-1}(c)$ de um valor regular $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ para uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$, de classe C^k, definida numa vizinhança aberta $U \supset M$ no espaço $\mathbb{R}^n$?

Veremos que, para $n - m = 1$, ou seja, quando M é uma hiperfície, M é imagem inversa de um valor regular de aplicação definida num aberto de $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, M é orientável. Veremos também que, para uma hiperfície M, ser orientável equivale à existência de um campo contínuo de vetores normais em M.

No caso geral, em que $n - m$ pode ser > 1, orientabilidade é uma condição necessária porém não suficiente. Para obter uma condição suficiente, introduzimos a noção de vizinhança tubular, que constitui um dos conceitos básicos mais importantes no estudo

das variedades diferenciáveis.

Demonstraremos o teorema de Whitney, segundo o qual $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é imagem inversa de um valor regular de aplicação definida numa sua vizinhança se, e somente se, existem em M $n-m$ campos contínuos de vetores normais, linearmente independentes em todos os pontos de M.

1 Campos de vetores normais a uma superfície

Diremos que um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ é normal à superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $p \in M$ quando u for perpendicular a todos os vetores tangentes a M no ponto p, isto é, quando se tiver $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in TM_p$. O conjunto dos vetores normais a M^m no ponto p é um subespaço vetorial de dimensão $n-m$ (= codimensão de M) do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Indicaremos este subespaço vetorial com $TM_p^\perp$ ou νM_p. Em cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$, o espaço $\mathbb{R}^n$ se decompõe na soma direta $\mathbb{R}^n = TM_p \oplus \nu M_p$.

Um *campo de vetores normais* à superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $v \colon M \to \mathbb{R}^n$ tal que $v(p) \in \nu M_p$ para todo $p \in M$. Conforme a definição geral (seção 3 do Cap. II), diz-se que $v \in C^r$ quando, para cada ponto $p \in M$ existe uma parametrização $\varphi \colon U_0 \to U$, cuja classe é a mesma de M, tal que $p \in U$ e $v \circ \varphi \colon U_0 \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^r. Quando $r \leq k$, esta noção tem sentido intrínseco, isto é, não depende da parametrização φ escolhida. Mostraremos logo adiante, porém, que uma superfície de classe C^k não se pode esperar que existam muitos campos de vetores normais de classe superior a C^{k-1}.

Exemplos de campos de vetores normais

1) $v \colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, dado por $v(p) = p$, é um campo normal C^∞.

2) Para toda $M^m \subset \mathbb{R}^n$, $v\colon M \to \mathbb{R}^n$, dado por $v(p) = 0$ em todos os pontos $p \in M$, é normal, de classe C^∞.

3) Sejam $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $\varphi\colon U_0 \to \mathbb{R}^3$ um mergulho de classe C^k, com $U = \varphi(U_0)$. Então $v\colon U \to \mathbb{R}^3$, definido pelo produto vetorial $v(p) = \varphi'(x) \cdot e_1 \times \varphi'(x) \cdot e_2$, $p = \varphi(x)$, é um campo de vetores normais de classe C^{k-1}, diferente de zero em todos os pontos da superfície U.

O Exemplo 3 se generaliza para hiperfícies, mediante o conceito de produto vetorial de n vetores em $\mathbb{R}^{n+1}$, que recordaremos agora.

Dados $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^{n+1}$, indiquemos com $[v_1, \ldots, v_s]$ a matriz $(n+1) \times s$ cujo i-ésimo vetor coluna é v_i. O produto vetorial de n vetores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o vetor $v = v_1 \times \cdots \times v_n$ caracterizado por $\langle v, h\rangle = \det[v_1, \ldots, v_n, h]$, para todo $h \in \mathbb{R}^{n+1}$. Em particular, para $i = 1, \ldots, n+1$, temos $\langle v, e_i\rangle = (-1)^{n+i+1} \cdot \det(\alpha^i)$, onde α^i é a matriz $n \times n$ cujos vetores colunas são obtidos de $v_1, \ldots, v_n$ pela omissão da i-ésima coordenada. Isto fornece a expressão $v = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i+1} \det(\alpha^i) \cdot e_i$, o que permite considerar $v = v_1 \times \cdots \times v_n$ como um "determinante simbólico" $v = \det[v_1, \ldots, v_n, E]$, no qual os elementos da última coluna E são os vetores $e_1, \ldots, e_{n+1}$. Tal determinante deve ser desenvolvido segundo os elementos da última coluna.

O produto vetorial $v = v_1 \times \cdots \times v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ é linear em cada um dos seus fatores. Além disso, v é perpendicular ao subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_n$, pois $\langle v, v_i\rangle = 0$. Com efeito, este produto escalar é, para todo $i \leq n$, um determinante com duas colunas iguais. A aplicação $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \times \cdots \times v_n$ é de classe C^∞. Notamos que $v_1 \times \cdots \times v_n \neq 0$ se, e somente se, os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. Finalmente, como $\det[v_1, \ldots, v_n, v_1 \times \cdots \times v_n] = |v_1 \times \cdots \times v_n|^2 \geq 0$, concluimos que, se os v_i são independentes, então $\{v_1, \ldots, v_n, v_1 \times \cdots \times v_n\}$ é uma

base positiva do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para uso na demonstração da Proposição 5, abaixo, notemos o seguinte: se $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ são tais que $w_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^i v_i$, $(j = 1, \dots, n)$, então $w_1 \times \cdots \times w_n = \det(\alpha_j^i) \cdot v_1 \times \cdots \times v_n$. Para provar isto, indiquemos com A a matriz $n \times n$ (α_j^i). Então $[w_1, \dots, w_n] = [v_1, \dots, v_n] \cdot A$. Seja $\widetilde{A}$ a matriz $n \times (n+1)$ obtida acrescentando a A uma última coluna, igual a e_{n+1}. Para cada vetor $h \in \mathbb{R}^{n+1}$ teremos então $[w_1, \dots, w_n, h] = [v_1, \dots, v_n, h] \cdot \widetilde{A}$ e portanto $\det[w_1, \dots, w_n, h] = \det \widetilde{A} \cdot \det[v_1, \dots, v_n, h]$. Como $\det \widetilde{A} = \det A$, concluimos que $\det[w_1, \dots, w_n, h] = \det A \cdot \det[v_1, \dots, v_n, h]$, e portanto $w_1 \times \cdots \times w_n = \det A \cdot (v_1 \times \cdots \times v_n)$.

Exemplo

4) Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de classe C^k. Dada uma parametrização $\varphi \colon U_0 \to U$, de classe C^k, define-se em U um campo v de vetores normais de classe C^{k-1}, pondo-se, para cada $p = \varphi(x) \in U$, $v(p) = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x^1}(x) \times \cdots \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^n}(x)$. Como em cada ponto $p = \varphi(x) \in U$ os vetores tangentes $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x), \dots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^n}(x)$ são linearmente independentes, vemos que $v(p) \neq 0$ para todo $p \in U$. Além disso, como νM_p tem dimensão 1, se tomarmos outra parametrização $\psi \colon V_0 \to V$, e definirmos $w \colon V \to \mathbb{R}^n$ por $w(p) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x^1}(y) \times \cdots \times \dfrac{\partial \psi}{\partial x^n}(y)$, $p = \psi(y)$, teremos $w(p) = a(p) \cdot v(p)$ com $a \neq 0$, para todo $p \in U \cap V$. Pela última observação feita acima, vemos que $a(p)$ é o determinante da matriz de passagem da base $\left\{ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x), \dots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^n}(x) \right\}$ para a base $\left\{ \dfrac{\partial \psi}{\partial x^1}(y), \dots, \dfrac{\partial \psi}{\partial x^n}(y) \right\}$, onde $p = \varphi(x) = \psi(y)$. Ora, esta é a matriz jacobiana do difeomorfismo $\varphi^{-1} \circ \psi \colon \psi^{-1}(U \cap V) \to \varphi^{-1}(U \cap V)$. Com efeito, escrevendo $\xi = \varphi^{-1} \circ \psi$, a matriz jacobiana (α_j^i) de ξ no ponto y é caracterizada por $\xi'(y) \cdot e_j = \sum_i \alpha_j^i e_i$. Como $\psi = \varphi \circ \xi$, temos $\psi'(y) \cdot e_j =$

$\varphi'(x) \cdot \xi'(y) \cdot e_j = \varphi'(x) \cdot \sum_i \alpha_j^i \varphi'(x) \cdot e_i$. Daí verifica-se que a matriz de passagem dos $\varphi'(x) \cdot e_i$ para os $\psi'(y) \cdot e_j$ é a matriz jacobiana de ξ no ponto y.

Outros exemplos de campos de vetores normais resultam da proposição seguinte. Lembremos o gradiente de uma função real diferenciável $f \colon U \to \mathbb{R}$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, introduzido na Seção 3 do Capítulo I. Tem-se

$$\operatorname{grad} f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \right).$$

Proposição 1. *Seja $f \colon U \to \mathbb{R}$ uma função real de classe C^r, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja c um número real. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície contida em $f^{-1}(c)$, então* $\operatorname{grad} f \colon M \to \mathbb{R}^n$ *é um campo de vetores normais, de classe C^{r-1} em M.*

Demonstração: Para cada $p \in M$ e cada $v \in TM_p$, seja $\lambda \colon (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ um caminho diferenciável, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Então $f(\lambda(t)) = c$ para todo t e por conseguinte $(f \circ \lambda)' = 0$. Logo $\langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0) = 0$. Isto mostra que $\operatorname{grad} f(p)$ é normal a M. Por outro lado, é evidente que $\operatorname{grad} f \in C^{r-1}$.

Corolário. *Seja $M^m = f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície obtida como imagem inversa de um valor regular de uma aplicação $f \colon U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Escrevamos $f = (f^1, \ldots, f^n)$. Então* $\operatorname{grad} f^1, \ldots, \operatorname{grad} f^n \colon M \to \mathbb{R}^{m+n}$ *são campos de vetores normais de classe C^{k-1} em M, os quais constituem uma base de νM_p em cada ponto $p \in M$.*

Com efeito, se $c = (c^1, \ldots, c^n)$ então $M \subset (f^i)^{-1}(c^i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$ e portanto $\operatorname{grad} f^i$ é normal a M, pela Proposição 1. Além disso, como c é valor regular de f, em cada ponto $p \in M = f^{-1}(c)$ a derivada $f'(p) \colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva. As n linhas da matriz de $f'(p)$ são portanto linearmente independentes. Ora, essas linhas são os vetores $\operatorname{grad} f^i(p)$.

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície de classe C^k. Para cada ponto $p_0 \in M$ existem $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto, com $p_0 \in \Omega$ e $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que $0 \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular de f e $\Omega \cap M = f^{-1}(0)$. (Cfr. Proposição 5, Cap. II.)

Sejam $f^1, \ldots, f^n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ as funções coordenadas de f. Como vimos, $\operatorname{grad} f^1, \ldots, \operatorname{grad} f^n \colon U \to \mathbb{R}^{m+n}$ são campos vetoriais de classe C^{k-1} em U, que formam em cada ponto $p \in U$ uma base do espaço normal. Portanto, um campo arbitrário de vetores normais $v \colon U \to \mathbb{R}^{m+n}$ determina univocamente (e é determinado por) n funções reais $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \colon U \to \mathbb{R}$ tais que

$$v(p) = \sum_{\alpha=1}^{n} \alpha^i(p) \operatorname{grad} f^i(p)$$

para cada $p \in U$. Quando $r \leq k-1$, o campo v é de classe C^r se, e somente se, as funções α^i são de classe C^r. Isto decorre da seguinte

Proposição 2. *Sejam $v_1, \ldots, v_n \colon M^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ campos vetoriais de classe C^r $(r \leq k)$, normais a uma superfície de classe C^k, tais que, em cada ponto $p \in M$, $\{v_1(p), \ldots, v_n(p)\}$ é uma base do espaço normal νM_p. Todo campo normal $v \colon M \to \mathbb{R}^{m+n}$ se escreve, de modo único, em cada ponto $p \in M$, como $v(p) = \alpha^1(p) \cdot v_1(p) + \cdots + \alpha^n(p) \cdot v_n(p)$. Isto define n funções reais $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \colon M \to \mathbb{R}$. O campo v é de classe C^r se, e somente se, as funções α^i o são.*

Demonstração: Omitida, por ser análoga à da Proposição 7, Capítulo II.

Mostraremos a seguir que, se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é de classe C^k, porém não de classe C^{k+1}, M admite localmente n campos de vetores normais linearmente independentes de classe C^{k-1}, porém não de classe C^k.

Proposição 3. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície de classe C^k. Se todo ponto de M possui uma vizinhança na qual se podem definir n campos de vetores normais linearmente independentes de classe C^k, então M é de classe C^{k+1}.*

Demonstração: Sejam $v_1, \ldots, v_n \colon M^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ campos normais de classe C^k, definidos no aberto $U \subset M$, linearmente independentes em cada ponto. Para cada $p \in U$, seja $V(p)$ a matriz $(m+n) \times n$ cujas colunas são os vetores $v_i(p)$. Como $V(p)$ tem posto n, sem perda de generalidade podemos supor que $V(p) = \begin{pmatrix} A(p) \\ B(p) \end{pmatrix}$, onde $A(p)$ é $n \times n$ invertível. Pondo $W(p) = V(p) \cdot A(p)^{-1}$, vemos que $W(p) = \begin{pmatrix} I_n \\ C(p) \end{pmatrix}$, onde $I_n =$ matriz identidade $n \times n$ e $C(p)$ é $m \times n$. Evidentemente, $p \mapsto W(p)$ é de classe C^k em U e, como as colunas de $W(p)$ são combinações lineares das de $V(p)$, concluimos que as colunas de $W(p)$ formam, em cada ponto $p \in U$, uma base do espaço normal νM_p. Consideremos agora a matriz $Z(p)$, com m linhas e $m+n$ colunas, definida como $Z(p) = (-C(p), I_m)$, onde $I_m =$ matriz identidade $m \times m$. Efetuando a multiplicação por blocos, temos $Z(p) \cdot W(p) = -C(p) \cdot I_n + I_m \cdot C(p) = -C(p) + C(p) = 0$. Isto significa que as linhas de $Z(p)$ e as colunas de $W(p)$ são duas a duas ortogonais. Como estas formam uma base de νM_p, segue-se que as linhas de $Z(p)$ definem em U m campos vetoriais tangentes, de classe C^k, linearmente independentes em cada ponto.

Pela Proposição 8 do Capítulo II, concluimos que $M \in C^{k+1}$.

3.1 Observações; a faixa de Moebius

1) Se, num aberto U de uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ acham-se definidos s campos de vetores normais $v_1, \ldots, v_s \colon U \to M$, de classe C^r, linearmente independentes em cada ponto de U, então os vetores v_i podem ser supostos ortonormais, isto é, todos de comprimento 1, dois a dois ortogonais. Com efeito, se tal não for o caso, aplicaremos aos v_i o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, substituindo-os por $u_1, \ldots, u_s$, onde

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}, \quad u_2 = \frac{u_2'}{|u_2'|}, \quad u_2' = v_2 - (v_2, u_1)u_1$$

$$u_n = \frac{u_n'}{|u_n'|}, \quad u_n' = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i \rangle u_i \,.$$

2) Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ uma hiperfície C^k $(k \geq 1)$ que possui um campo contínuo de vetores normais unitários $v \colon M \to \mathbb{R}^{m+1}$. Seja $\gamma \colon [a, b] \to M$ um caminho contínuo em M com $\gamma(a) = \gamma(b)$. Então, dada qualquer família contínua a um parâmetro $u(t)$, de vetores normais unitários ao longo de γ (isto é, $t \mapsto u(t)$ é contínua e, para cada $t \in [a, b]$, $u(t) \in TM_{\gamma(t)}$ é normal a M no ponto $\gamma(t)$), tem-se *necessariamente* $u(a) = u(b)$.

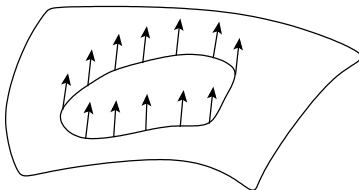



Figura 3.1.

Com efeito, indiquemos por $v(t)$ o vetor $v(\gamma(t))$. Então $v(t)$ depende continuamente de $t \in [a,b]$. Ora, $\langle u(t), v(t)\rangle = \pm 1$ e, sendo $[a,b]$ conexo, deve ser $\langle u(t), v(t)\rangle$ constante. Em particular, $\langle u(s), v(s)\rangle = \langle u(b), v(b)\rangle$. Como $v(a) = v(b)$ segue-se que $u(a) = u(b)$.

3) Vejamos agora um exemplo de uma superfície $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ que *não possui* campo contínuo de vetores normais que não se anula em ponto algum.

Pela Observação 1, esta superfície não pode ser definida implicitamente.

Trata-se da *faixa de Moebius.*

A *faixa de Moebius* M é o espaço obtido do retângulo $[0, 2\pi] \times (0,1)$ pela identificação dos pontos $(0,t)$ e $(2\pi, 1-t)$, t percorrendo o intervalo $(0,1)$.

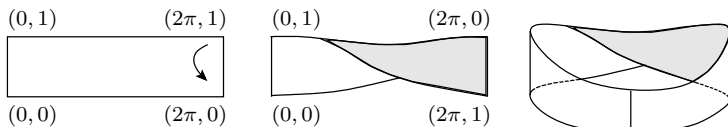



Figura 3.2.

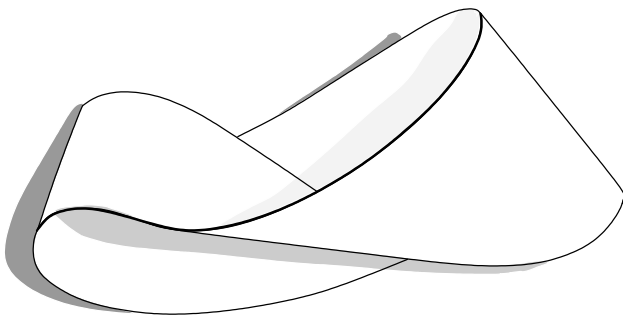



Figura 3.3.

Como superfície em $\mathbb{R}^3$, a faixa de Moebius é obtida pela rotação de um segmento de reta aberto, de comprimento 1, cujo

centro se apoia num círculo de raio 1. Enquanto o centro do segmento desliza sobre o círculo, o segmento realiza uma rotação de 180° até o final da primeira volta. Uma descrição mais precisa é dada pela aplicação de classe C^∞

$$f\colon (0,1)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,$$

onde $f(s,t) = \gamma(t) + \big(s - \frac{1}{2}\big)\delta(t)$, sendo $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ e $\delta(t) = \cos\frac{t}{2}\cdot\gamma(t) + \operatorname{sen}\frac{t}{2}\cdot e_3$.

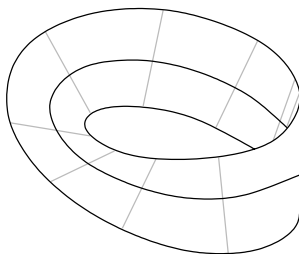



Figura 3.4.

A imagem de f é a faixa de Moebius $M^2\subset\mathbb{R}^3$. Para cada intervalo aberto $I\subset\mathbb{R}$ de amplitude $\leq 2\pi$ a restrição de f a $(0,1)\times J$ parametriza um subconjunto aberto de M.

O caminho $v\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ definido por $v(t) = \frac{\partial f}{\partial s}\big(\frac{1}{2},t\big)\times\frac{\partial f}{\partial t}\big(\frac{1}{2},t\big) = \big(-\cos t\operatorname{sen}\frac{t}{2}, -\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\big)$ é contínuo, $|v(t)| = 1$ para todo t, e $v(t)$ é normal à faixa de Moebius no ponto $\gamma(t)$ (no centro da faixa) para todo $t\in[0,2\pi]$; é importante notar que $v(0) = -v(2\pi)$, enquanto que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. A Observação 2 mostra que não pode existir um campo contínuo de vetores normais não nulos na faixa de Moebius M.

2 Superfícies Orientáveis

A existência ou não de um campo contínuo de vetores normais unitários em uma hiperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ está ligada ao conceito mais geral de *orientabilidade* que estudaremos agora.

Um *atlas* de classe C^k numa superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é uma coleção $\mathfrak{A}$ de parametrizações $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$, de classe C^k, tal que os conjuntos abertos U formam uma cobertura de M.

Duas parametrizações de classe C^k, $\varphi\colon U_0 \to U$ e $\psi\colon V_0 \to V$ dizem-se *coerentes* se, ou bem $U \cap V = \emptyset$, ou bem $U \cap V \neq \emptyset$ e a mudança de coordenadas $\xi = \varphi^{-1} \circ \psi$ tem determinante jacobiano positivo em todos os pontos de seu domínio $\psi^{-1}(U \cap V)$.

Um atlas $\mathfrak{A}$ chama-se *coerente* quando todos os pares de parametrizações $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}$ são coerentes.

Uma superfície M diz-se *orientável* quando existe um atlas coerente em M. Uma vez escolhido um atlas coerente $\mathcal{P}$, dizemos que M está *orientada.* As parametrizações que são coerentes com aquelas de $\mathcal{P}$ são chamadas de *positivas*, as outras são ditas *negativas.*

Cada subconjunto aberto W de uma superfície orientável M é também uma superfície orientável. Realmente, dado um atlas coerente $\mathcal{P}$ em M, a coleção $\mathcal{P}_W$ das restrições $\varphi|\varphi^{-1}(U \cap W)$ das parametrizações $\varphi\colon U_0 \to U$, $\varphi \in \mathcal{P}$, é um atlas coerente em W.

A seguinte proposição fornece exemplos de superfícies orientáveis.

Proposição 4. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k, $k \geq 1$. Se existem $n-m$ campos contínuos de vetores normais $v_1, \ldots, v_{n-m}\colon M \to \mathbb{R}^n$ tais que $v_1(p), \ldots, v_{n-m}(p)$ são linearmente independentes em cada ponto $p \in M$, então M é orientável.*

Demonstração: Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das parametrizações de classe C^k, $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$, tais que:
(i) U_0 é conexo.
(ii) para cada $x \in U_0$, a matriz $n \times n$, $A\varphi(x)$, cujas colunas são $\varphi'(x) \cdot e_1, \dots, \varphi'(x) \cdot e_m$, $v_1(\varphi(x)), \dots, v_{n-m}(\varphi(x))$, tem determinante positivo. Vamos mostrar que $\mathcal{P}$ é um atlas coerente em M.

Seja $p \in M$, arbitrário. Consideremos uma parametrização de classe C^k, $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$, com $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ conexo e $p \in U$. Então ou $\varphi \in \mathcal{P}$, ou (por infelicidade) $\det[A\varphi(x)] < 0$ para todo $x \in U_0$. Neste caso, substituímos φ pela parametrização $\psi\colon V_0 \to U$ dada por $\psi(x^1, \dots, x^m) = \varphi(-x^1, \dots, x^m)$, que certamente pertence à coleção $\mathcal{P}$. Isto mostra que as imagens das parametrizações pertencentes a $\mathcal{P}$ constituem uma cobertura de M.

Resta provar que, dadas $\varphi\colon U_0 \to U$ e $\psi\colon V_0 \to V$, elementos de $\mathcal{P}$ com $U \cap V \neq \varphi$, então $\varphi^{-1} \circ \psi\colon \psi^{-1}(U \cap V) \to \varphi^{-1}(U \cap V)$ tem determinante jacobiano positivo em cada ponto $z \in \psi^{-1}(U \cap V)$. Seja $\varphi(x) = \psi(z)$. Escrevamos

$$\psi'(z) \cdot e_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_j^i \, \varphi'(x) \cdot e_i\,; \;\; j = 1, \dots, m.$$

Então $\det[A\psi(z)] = \det(\beta_j^i) \det[A\varphi(x)]$, logo $\det(\beta_j^i) > 0$. Mas a matriz jacobiana de $\varphi^{-1} \circ \psi$ em z é precisamente (β_j^i), o que conclui a demonstração.

Corolário. *Se $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação de classe C^k $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ aberto), então M é orientável.*

Atenção: A recíproca da Proposição 4 e de seu corolário é falsa em geral. A condição de orientabilidade é mais fraca do que a existência de $n - m$ campos contínuos de vetores normais linearmente independentes em cada ponto. Existem exemplos de superfícies $M^m \subset \mathbb{R}^n$ orientáveis que não possuem $n - m$ campos

contínuos de vetores normais linearmente independentes em cada ponto. Tais exemplos são complicados e fogem ao nível deste texto. Estudamos a seguir um caso especial em que a recíproca é verdadeira, a saber, quando M é uma hiperfície.

Proposição 5. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hiperfície de classe C^k. Então M é orientável se, e somente se, existe um campo contínuo de vetores normais $u\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, com $u(p) \neq 0$ para todo $p \in M$.*

Demonstração: Metade da proposição resulta da Proposição 4. Basta então mostrar que se pode definir numa hiperfície orientável $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um campo contínuo de vetores normais $u\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$, com $|u(p)| = 1$ para todo $p \in M$. Seja $\mathcal{P}$ um atlas coerente em M. Dado $p \in M$, tomemos uma parametrização $\varphi\colon U_0 \to U$ pertencente a $\mathcal{P}$, com $p = \varphi(x) \in U$, consideremos o produto vetorial $w(p) = \varphi'(x) \cdot e_1 \times \cdots \times \varphi'(x) \cdot e_n$ (vide Seção 1) e ponhamos $u(p) = w(p)/|w(p)|$. Isto definirá um campo de vetores normais unitários $u\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$, de classe C^{k-1}, desde que mostremos que $u(p) \in \nu_p M$ não depende da escolha da parametrização $\varphi \in \mathcal{P}$. Como a dimensão de $\nu_p M$ é 1, só existem dois valores unitários normais a M no ponto p, os quais diferem apenas em sinal. Devemos então verificar que, se $\psi\colon V_0 \to V$ é outra parametrização em $\mathcal{P}$, com $p = \psi(y) \in V$, teremos $\psi'(y) \cdot e_1 \times \cdots \times \psi'(y) \cdot e_n = a \cdot w(p)$, com $a > 0$. Isto porém resulta de ser a o determinante jaobiano da mudança de coordenadas $\varphi^{-1}\psi$, o qual é positivo em virtude da coerência do atlas $\mathcal{P}$. (Vide Exemplo 4, na Seção 1).

Observação: Ficou demonstrado acima que se $u\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é um campo contínuo de vetores normais unitários numa hiperfície de classe C^k então M é orientável e n é automaticamente de classe C^{k-1}. E reciprocamente, se M é orientável de classe C^k então existe em M um campo de classe C^{k-1} de vetores normais

unitários.

Daremos agora um exemplo de uma superfície compacta $P^2 \subset \mathbb{R}^4$ não orientável. É um fato topológico, cuja demonstração escapa às finalidades destas notas, que toda hiperfície *compacta* $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é necessariamente orientável.

Exemplo: **O plano projetivo** $P^2 \subset \mathbb{R}^4$ (cf. Hilbert e Cohn-Vossen, "Geometry and Imagination", pag. 340). Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação de classe C^∞ definida por $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. O plano projetivo é o conjunto $P^2 = f(S^2)$, imagem por f da esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Afirmamos que P^2 é uma superfície de dimensão 2 e de classe C^∞ no $\mathbb{R}^4$. Isto será feito em etapas (i), (i)) e (iii).

(i) Provemos inicialmente que, dados $p, q \in S^2$, $f(p) = f(q)$ se, e somente se, $p = \pm q$.

Com efeito, é evidente que $f(p) = f(-p)$. Por outro lado se $f(p) = (a,b,c,d)$, $p = (x,y,z) \in S^2$, então tem-se:

(I) $x^2 - y^2 = a, \quad xy = b, \quad xz = c, \quad yz = d$

(II) $x^2 - y^2 = a, \quad dx^2 = bc, \quad cy^2 = bd, \quad bz^2 = cd, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Se $b = c = c = 0$, as equações (I) mostram que pelo menos duas (donde exatamente duas) das coordenadas x, y, z são nulas, a restante devendo ser necessariamente igual a ± 1. Neste caso, $f^{-1}(0,0,0,0) = (0,0,\pm 1)$, $f^{-1}(1,0,0,0) = (\pm 1, 0, 0)$ e $f^{-1}(-1,0,0,0) = (0, \pm 1, 0)$.

Se algum dos números b, c, d for $\neq 0$, as equações (II) determinarão x^2, y^2, z^2, enquanto as 3 últimas equações (I) mostram que uma escolha de sinal numa coordenada determina o sinal das outras duas, donde $f^{-1}(a,b,c,d)$ consiste de exatamente dois pontos antípodas $p = (x,y,z)$ e $-p = (-x,-y,-z)$.

(ii) Mostremos agora que, em cada ponto $p = (x, y, z) \in S^2$, a derivada $f'(p)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ leva o plano tangente $(TS^2)_p \subset \mathbb{R}^3$ injetivamente no $\mathbb{R}^4$.

Isto é feito observando a matriz jacobiana

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

Dois dos menores 3×3 de Jf são $2 \times (x^2 + y^2)$ e $2y(x^2 + y^2)$. Logo Jf tem posto 3 exceto quando $x = y = 0$. Segue-se que $f'(p)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é injetora para todo $p \in S^2 - \{a, -a\}$, $a = (0, 0, 1)$.

Os pontos $\pm a$ são examinados separadamente: A matriz jacobiana Jf mostra que

$$f'(\pm a) \cdot e_1 = \pm e_3 \quad \text{e} \quad f'(\pm a) \cdot e_2 = \pm e_4\,.$$

Como os planos tangentes a S^2 nos pontos $\pm a$ coincidem e são gerados por e_1 e e_2, resulta que $\dim[f'(\pm a) \cdot (TS^2)_{\pm a}] = 2$.

(iii) Pelo resultado acima, para cada parametrização de classe C^∞, $\varphi\colon U_0 \to S^2$, de um subconjunto aberto de S^2, a aplicação $f \circ \varphi\colon U_0 \to \mathbb{R}^4$ é uma imersão C^∞. Se $\varphi(U_0)$ é suficientemente pequeno para não conter par algum de pontos antípodas, então $f \circ \varphi$ será $1-1$. Resta mostrar que $f \circ \varphi$ é um homeomorfismo de U_0 sobre um subconjunto *aberto* $U = f \circ \varphi(U_0)$ de P^2. Isto é verdade porque $f\colon S^2 \to P^2$ é uma aplicação aberta: Dado um subconjunto aberto $A \subset S^2$, suponhamos, por absurdo, que $f(A)$ não seja aberto em P^2. Então existe uma seqüência de pontos $x_n \in S^2$ tais que $f(x_n) \to f(y)$, $y \in A$ e $f(x_n) \notin f(A)$. Esta última relação

significa que $x_n \notin A$ e $x_n \notin -A = \{-x; x \in A\}$. Como S^2 é compacta, podemos supor (considerando uma subseqüência, se necessário) que $x \notin A \cup (-A)$. Pela continuidade de f, no entanto, $f(x) = f(y) \in f(A)$, donde $x = \pm y \in \pm A$, contradição.

A superfície de classe C^∞ $P^2 = f(S^2)$ é compacta pois é imagem contínua por f do compacto S^2.

O *plano projetivo* é concebido "abstratamente" como o espaço quociente S^2/E da esfera unitária S^2 pela relação de equivalência E cujas classes de equivalência são $\{p, -p\}$, $p \in S^2$. Dotamos S^2/E da topologia co-induzida pela aplicação canônica $\pi\colon S^2 \to S^2/E$.

Notemos que E é precisamente a relação de equivalência determinada por $f\colon S^2 \to P^2$. Por f ser aberta e do diagrama clássico

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & P^2 \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle\overline{f}} & \\ S^2/E & & \end{array} \qquad \overline{f}(\pi(x)) = f(x)$$

resulta que $\bar{f}\colon S^2/E \to P^2$ é um homeomorfismo.

Portanto, a superfície $P^2 \subset \mathbb{R}^4$ é uma imagem "concreta" do plano projetivo S^2/E, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$.

Resta apresentar uma justificativa para a não-orientabilidade de P^2. Uma razão é que P^2 contém uma faixa de Moebius, a imagem por f de uma faixa equatorial em S^2, como mostra a figura 3.5.

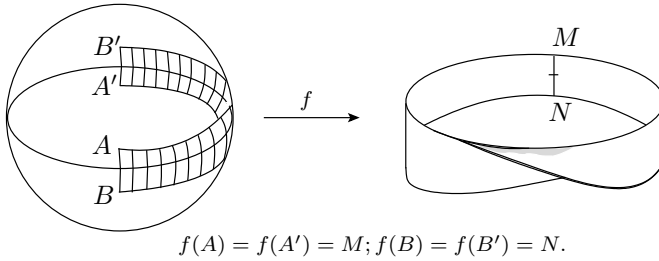



Figura 3.5.

Se P^2 fosse orientável e $\mathfrak{A}$ fosse um atlas coerente em P^2, as restrições a M das parametrizações de P^2, pertencentes a $\mathfrak{A}$, forneceriam uma orientação de M, o que é impossível.

Em particular, não existe aplicação de classe C^1, $g\colon W \to \mathbb{R}^2$ definida num aberto $W \subset \mathbb{R}^4$ contendo P^2 tal que $P^2 = g^{-1}(c)$, onde $c \in \mathbb{R}^2$ é valor regular de g.

3 A vizinhança tubular de uma superfície compacta

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície de classe C^k, $k \geq 1$.

Diz-se que o segmento $[p, a] = \{p+t(a-p); 0 \leq t \leq 1\}$ é *normal a M no ponto p* se $p \in M$ e $v = a - p \in \nu M_p$.

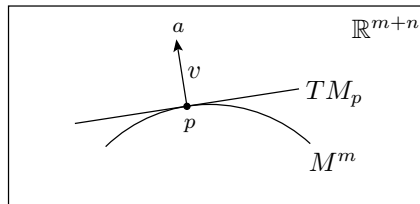



Figura 3.6.

A bola normal (de dimensão n) $B^\perp(p;\varepsilon)$ é a reunião dos seg-

mentos normais a M no ponto p, de comprimento $< \varepsilon$. Logo

$$B^{\perp}(p;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^{m+n}; |x-p| < \varepsilon, \langle x-p, v\rangle = 0 \ \forall\, v \in TM_p\}$$

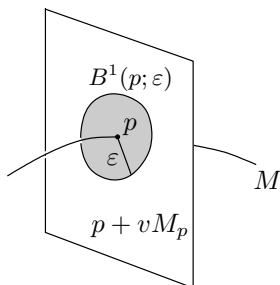



Figura 3.7.

Diz-se que o número real $\varepsilon > 0$ é um *raio normal admissível* para um subconjunto $X \subset M$ quando, dados dois segmentos $[p,a]$ e $[q,b]$, normais a M, de comprimento $< \varepsilon$, com $p \neq q \in X$, tem-se $[p,a] \cap [q,b] = \emptyset$.

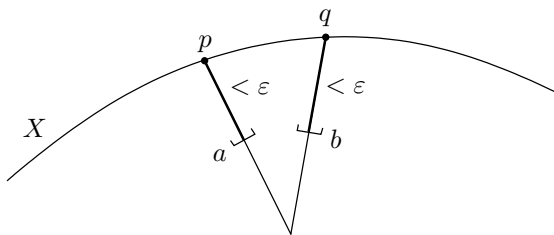



Figura 3.8.

Em outras palavras, $B^{\perp}(p;\varepsilon) \cap B^{\perp}(q;\varepsilon) = \emptyset$ se $p \neq q \in X$ e ε for um raio normal admissível para X.

Demonstraremos agora o teorema da vizinhança tubular para superfícies $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$, compactas, de classe ≥ 2.

O leitor pode provar, como exercício, que em nenhuma vizinhança da origem existe um raio normal admissível para a curva

$y = x^{4/3}$, de classe C^1 no plano $\mathbb{R}^2$. Devemos considerar, portanto, superfícies de classe C^k, $k \geq 2$.

Proposição 4. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície compacta de classe C^k, $k \geq 2$. Então:*

(1) *Existe $\varepsilon > 0$, raio normal admissível para M.*
($p \neq q$ em $M \Rightarrow B^\perp(p;\varepsilon) \cap B^\perp(q;\varepsilon) = \emptyset$).

(2) *A reunião $V_\varepsilon(M) = \bigcup_{p \in M} B^\perp(p;\varepsilon)$ dos segmentos normais a M de comprimento $< \varepsilon$ é um aberto do $\mathbb{R}^{m+n}$ chamado a vizinhança tubular de M de raio ε.*

(3) *A aplicação $\pi\colon V_\varepsilon(M) \to M$, que associa a cada ponto $q \in V_\varepsilon(M)$ o pé do único segmento normal que o contém, é de classe C^{k-1}.*

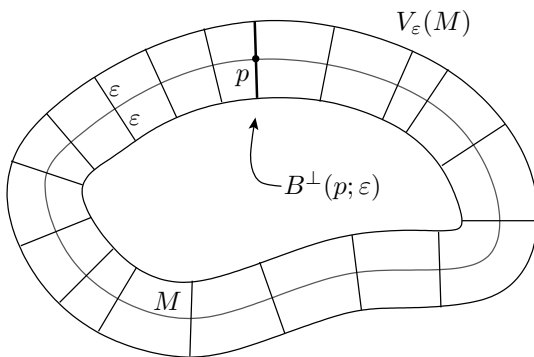



Figura 3.9.

Demonstração:

(i) A proposição vale localmente: todo ponto $p_0 \in M$ pertence a um aberto $U \subset M$ para o qual existe raio normal admissível $\varepsilon_U > 0$.

Com efeito, em virtude das observações que seguem o Corolário da Proposição 1, existe uma parametrização $\varphi\colon V_0 \to V$, de classe C^k, de uma vizinhança $p_0 \in V \subset M$ e n campos de vetores normais unitários, de classe C^{k-1}, $v_1, \ldots, v_n\colon V \to \mathbb{R}^{m+n}$, mutuamente ortogonais em cada ponto. (A ortonormalidade justifica-se por 3.1.)

Consideremos a aplicação $\Phi\colon V_0 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$, de classe C^{k-1}, dada por $\Phi(x, \alpha^1, \ldots, \alpha^n) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i(\varphi(x))$. Geometricamente, Φ é a extensão de φ que aplica, isométrica e linearmente, a variedade linear $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ sobre a variedade linear $\varphi(x) + \nu M_p$, para cada $x \in V_0$.

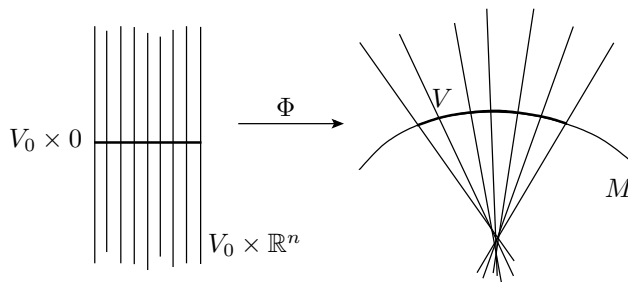



Figura 3.10.

Para cada $x \in V_0$, a matriz jacobiana de Φ no ponto $(x, 0)$ tem por colunas os vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x),\ 1 \le i \le m \quad \text{e} \quad v_j(\varphi(x)),\ m+1 \le j \le m+n.$$

Os m primeiros formam uma base para $TM_{\varphi(x)}$ enquanto que os n últimos constituem uma base para $\nu M_{\varphi(x)}$. Por conseguinte, $\Phi'(x, 0)\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ é um isomorfismo.

Seja $\varphi(x_0) = p_0$. Pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança aberta de $(x_0, 0)$ em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, que se aplica difeomorficamente sobre uma vizinhança de p_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$. Podemos tomar a primeira do tipo $U_0 \times B^n(\varepsilon)$, onde $x_0 \in U_0 \subset V_0 \subset \mathbb{R}^m$ e raio $\varepsilon > 0$. Se escrevemos $U = \varphi(U_0)$, Φ transforma difeomorficamente $U_0 \times B^n(\varepsilon)$ na reunião $V_\varepsilon(U)$ de todos os segmentos normais de origem em U e comprimento $< \varepsilon$ (ver Figura 3.10).

Dados $p \neq q \in U$, tem-se $B^\perp(p;\varepsilon) \cap B^\perp(q;\varepsilon) = \emptyset$, pois dois segmentos normais de comprimentos $< \varepsilon$, com origem em dois pontos distintos $\varphi(x)$, $\varphi'(x) \in U$, são imagens de segmentos da forma $x \times I$, $x' \times I'$, com $x \neq x'$, I e I' contidos em raios da bola $B^n(\varepsilon)$. Logo os segmentos dados $\Phi(x \times I)$ e $\Phi(x' \times I')$ são disjuntos.

O retângulo comutativo (onde π_1 é a projeção do produto no primeiro fator)

mostra que $V_\varepsilon(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^{m+n}$ e que a aplicação $\pi\colon V_\varepsilon(U) \to U$ é de classe C^{k-1}.

(ii) A proposição vale globalmente. Por compacidade, M pode ser recoberta por um número finito $U_1, \ldots, U_r$ de vizinhanças, cada uma das quais possui raio normal admissível $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$.

Seja $\varepsilon > 0$ inferior a todos os ε_i e tal que 2ε é número de Lebesgue da cobertura $U_1, \ldots, U_r$. Afirmamos que ε é raio normal

admissível para M. Com efeito, dados dois segmentos normais $[p,a]$ e $[q,b]$ de comprimento $< \varepsilon$, ou p e q pertencem ao mesmo U_i, ou $|p-q| \geq 2\varepsilon$. No primeiro caso, os segmentos dados são disjuntos pois $\varepsilon < \varepsilon_i$. No segundo caso, são disjuntos porque um triângulo não pode ter dois lados menores que ε e o terceiro $\geq 2\varepsilon$.

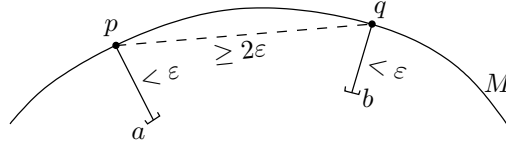



Figura 3.11.

As demais afirmações da proposição têm caráter local e portanto seguem-se de (i). Com efeito,

$$V_\varepsilon(M) = \bigcup V_\varepsilon(U)$$

é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{m+n}$ e $\pi\colon V_\varepsilon(M) \to M$ é de classe C^{k-1}.

Diremos que a vizinhança tubular $V_\varepsilon(M)$ é *equivalente ao espaço produto* $M \times B^n(\varepsilon)$ se existir um difeomorfismo $h\colon M \times B^n(\varepsilon) \to V_\varepsilon(M)$ com as seguintes propriedades:

(i) O triângulo

é comutativo, isto é, $\pi \circ h = \pi_1$.

(ii) Para cada $p \in M$, h é uma isometria da "fibra" $\pi_1^{-1}(p) = p \times B^n(\varepsilon)$ sobre a "fibra" $\pi^{-1}(p) = B^{\perp}(p;\varepsilon)$.

Nestas condições diremos que h é uma *equivalência* entre estes conjuntos.

Exemplo

A aplicação $h \colon S^1 \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to V_{1/2}(S^1)$, dada por $h(z,t) = (1+t)z$ é uma equivalência entre a vizinhança tubular $V_{1/2}(S^1)$ do círculo e o produto de S^1 pelo intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Proposição 5. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície compacta de classe C^∞. As seguintes condições acerca de M são equivalentes:*

1) *$M = f^{-1}(a)$, onde a é valor regular de uma aplicação de classe C^∞, $f \colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto.*

2) *Existem em M n campos de vetores normais de classe C^∞, linearmente independentes em todos os pontos.*

2') *Existem em M n campos de vetores, de classe C^∞, transversais a M em todos os pontos (isto é, em cada $p \in M$, os n campos geram um suplemento para TM_p).*

3) *Toda vizinhança tubular de M é equivalente a um produto.*

Demonstração: 1) $\Rightarrow$ 2). Basta tomar $v_1(p) = \operatorname{grad} f^1(p), \ldots, v_n(p) = \operatorname{grad} f^n(p)$.
2) $\Rightarrow$ 2') Evidente.
2)$^{\square\prime}$ $\Rightarrow$ 2) Basta projetar, em cada ponto, os vetores dois campos transversais sobre o espaço normal.
2) $\Rightarrow$ 3) Podemos supor que os n campos são unitários e dois a dois ortogonais. Seja $h \colon M \times B^n(\varepsilon) \to V_\varepsilon(M)$ definido por $h(x, \alpha^1, \ldots, \alpha^n) = x + \Sigma\, \alpha^i v_i(x)$.

3) $\Rightarrow$ 1) Consideremos o diagrama

Seja $f = \pi_2 \circ h^{-1}\colon V_\varepsilon(M) \to \mathbb{R}^n$. Então $0 \in \mathbb{R}^n$ é valor regular de $f \in C^\infty$ e $M = f^{-1}(0)$.

Observação: O teorema é válido para superfícies compactas de classe C^k, $2 \leq k < \infty$. A demonstração acima não se aplica porque a projeção da vizinhança tubular tem classe C^{k-1} apenas.

4 A vizinhança tubular de uma superfície não compacta

Nesta seção consideramos superfícies $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ de classe ≥ 2, não necessariamente compactas.

Dada uma função contínua $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$, estritamente positiva, escrevemos $V_\varepsilon(M) = \bigcup_{p \in M} B^\perp(p; \varepsilon(p))$, onde $B^\perp(p; \varepsilon(p))$ é, como antes, a bola aberta normal a M no ponto p, com raio $\varepsilon(p)$.

Proposição 6. *Se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é de classe ≥ 2, existe uma função $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$, contínua, estritamente positiva, tal que*

(1) *$V_\varepsilon(M)$ é aberto em $\mathbb{R}^{m+n}$, e $M \subset V_\varepsilon(M)$.*

(2) *Se $p \neq q$ em M, então $B^\perp(p; \varepsilon(p)) \cap B^\perp(q; \varepsilon(q)) = \emptyset$.*

Assim, cada ponto $x \in V_\varepsilon(M)$ pertence a um único segmento normal $[p, a)$, com $p \in M$ e $|a - p| = \varepsilon(p)$.

(3) *A projeção* $\pi\colon V_\varepsilon(M) \to M$*, que associa a cada ponto* $x \in V(M)$ *o pé do único segmento normal que o contém, é de classe* C^{k-1}*.*

(4) *Para cada ponto* $p \in M$ *existe uma vizinhança* $U \subset M$ *e um homeomorfismo* h *da imagem inversa* $\pi^{-1}(U)$ *sobre o produto* $U \times B^n$ *(onde* $B^n \subset \mathbb{R}^n$ *é a bola aberta de centro* 0 *e raio* 1*) tal que o diagrama*

comuta.

$V_\varepsilon(M)$ é chamada a vizinhança tubular da superfície M de raio ε.

Para provarmos a Proposição 6, precisamos de dois lemas:

Lema 1. *Seja* $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ *uma superfície de classe* ≥ 2*. Mesmo que* M *não seja compacta, todo subconjunto compacto* $K \subset M$ *possui um raio normal admissível* $\alpha_K > 0$*. Ou seja, dois segmentos normais a* M*, de comprimento* $< \alpha_K$ *com origem em dois pontos distintos de* K*, são sempre disjuntos. Além disso,* α_K *pode ser tomado de tal modo que se* $V_{\alpha_K}(K) = \bigcup_{p\in K} B^\perp(p;\alpha_K)$*, então tem-se* $\overline{V_{\alpha_K}(K)} \cap M = K$*.*

Demonstração: Seja $L \subset M$ uma vizinhança compacta de K. Segue-se da demonstração da Proposição 4 que existe um raio normal admissível α_L para L. Tomando

$$\alpha_K = \frac{1}{2}\min\{\alpha_L\,, d(K, M - L)\},$$

então $\overline{V_{\alpha_K}(K)} \cap M = K$. De fato, $q \in \overline{V_{\alpha_K}(K)} \cap M \Rightarrow [q \in M$ e $d(q,K) \leq \alpha_K < d(K, M-L)] \Rightarrow [q \in M$ e $q \notin M - L] \Rightarrow q \in L$.

Como $q \in \overline{V_{\alpha_K}(K)}$, existe $p \in K$ tal que $|p-q| \leq \alpha_K < \alpha_L$ e $[p,q]$ é segmento normal a M no ponto p. Ora, $p, q \in L$ e $|p-q| < \alpha_L$, logo $q = p \in K$.

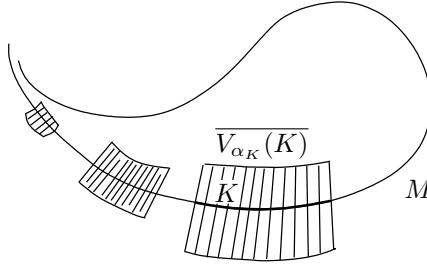



Figura 3.12.

Lema 2. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície de classe C^K $(K \geq 2)$.*

(1) *Existe uma seqüência de conjuntos compactos $K_1, K_2, \ldots,$ contidos em M tais que $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ e $M = \bigcup_{i=1} K_i$.*

(2) *Existem também números reais $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots > 0$ tais que, para $p \in K_i$, $q \in K_j$ e $p \neq q$, tem-se:*

$$\text{(a)} \qquad B^{\perp}(p;\varepsilon_i) \cap B^{\perp}(q;\varepsilon_j) = \emptyset.$$

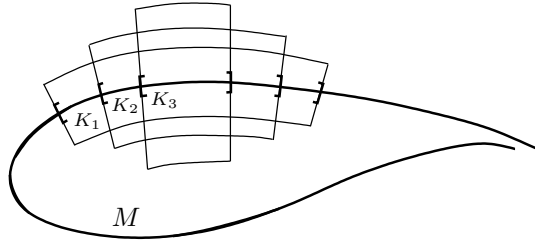



Figura 3.13.

Demonstração: A afirmação (1) resulta simplesmente de ser a superfície M um espaço localmente compacto com base enumerável.

Quanto à afirmação (2), pelo Lema 1 existe, para cada $i \in N$, um número real $\alpha_i > 0$, raio normal admissível para K_i, com $\overline{V_{\alpha_i}(K_i)} \cap M = K_i$.

Tomamos, por motivos técnicos, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$

Pomos $\varepsilon_1 = \alpha_2$ e $\varepsilon_2 = \alpha_3$. Suponhamos definidos $\varepsilon_1 \geq \cdots \geq \varepsilon_s$ de modo que $\varepsilon_i \leq \alpha_{i+1}$ e a condição (a) do enunciado seja válida para $i, j \leq s$. Definimos, por indução, o número ε_{s+1} de tal modo que:

$$(*) \quad 0 < \varepsilon_{x+1} < \min\left\{\alpha_{s+2}, \varepsilon_s, d\Big(K_{s+1} - \operatorname{int} K_s, \bigcup_{i=1}^{s-1} V_{\varepsilon_i}(K_i)\Big)\right\}.$$

Então a condição (a) será válida para $i, j \leq s+1$.

Com efeito, temos três casos a considerar:

1º caso: $i, j \leq s$. Hipótese de indução.

2º caso: $i = s$ e $j = s+1$. Então a afirmação é trivialmente correta, pois $\varepsilon_s \leq \alpha_{s+1}$.

3º caso: $p \in K_{s+1} - K_s$ e $q \in K_{i_0}$, $i_0 < s$.

Consideremos dois segmentos normais a M, $[p, a]$ com comprimento $< \varepsilon_{s+1}$ e $[q, b]$ com comprimento $< \varepsilon_{i_0}$. Como $p \in K_{s+1} - \operatorname{int} K_s$ e $[q, b] \subset V_{\varepsilon_{i_0}}(K_{i_0}) \subset \bigcup_{i=1}^{s-1} V_{\varepsilon_i}(K_i)$, a equação (*) mostra que $\varepsilon_{s+1} < d(p, [q, b])$. Logo $[p, a] \cap [q, b] = \emptyset$. Isto conclui a demonstração do Lema 2.

Demonstração da Proposição 6: Seja, com a notação do Lema 2, $V(M) = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{\varepsilon_i}(K_i)$. Introduzamos $\varepsilon \colon M \to \mathbb{R}$, uma função contínua estritamente positiva definida por $\varepsilon(p) = \operatorname{dist}(p, \mathbb{R}^{m+n} -$

$V(M)$). Como $0 < \varepsilon(p) \leq \varepsilon_i$ para $p \in K_i - K_{i-1}$, segue-se que $V_\varepsilon(M) \subset V(M)$ e, por conseguinte, cada ponto $x \in V(M)$ pertence a um único segmento normal a M.

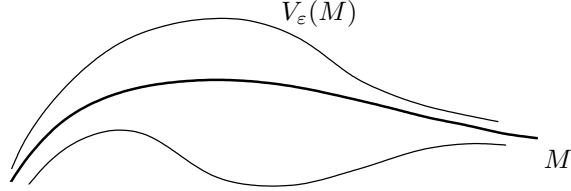



Figura 3.14.

(1) Provemos que $V_\varepsilon(M)$ é aberto em $\mathbb{R}^{m+n}$. Consideremos uma cobertura de M por vizinhanças parametrizadas U, em cada uma das quais estão definidos n campos de vetores normais unitários, mutuamente ortogonais, $v_1, \ldots, v_n \colon U \to \mathbb{R}^{m+n}$, de classe C^{k-1}. Seja $\varphi \colon U_0 \subset \mathbb{R}^m \to U$ uma parametrização de U. O conjunto $A = \{(x, y) \in U_0 \times \mathbb{R}^n; |y| < \varepsilon(\varphi(x))\}$ é aberto em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Como $\Phi \colon A \to \pi^{-1}(U)$, definido por $\Phi(x, y) = \varphi(x) + \Sigma\, y^i v_i(\varphi(x))$ é um difeomorfismo, resulta que $\pi^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^{m+n}$. Mas $V_\varepsilon(M) = \bigcup \pi^{-1}(U)$, quando U percorre a cobertura tomada. Logo $V_\varepsilon(M)$ é aberto.

(2) O diagrama comutativo

mostra que $\pi \in C^{k-1}$.

(3) Basta tomar $h\colon U \times B^n \to \pi^{-1}(U)$ definida por $h(p, y) = \Phi(\varphi^{-1}(p), \varepsilon(p) \cdot y)$. Então h é um homeomorfismo e $\pi \circ h(p, y) = (\varphi\pi_1 \circ \Phi^{-1} \circ \Phi)\ (\varphi^{-1}(p), \varepsilon(p), y) = p$, o que conclui a demonstração da Proposição 6.

Atenção: A noção de vizinhança tubular, dada por este teorema, será generalizada num capítulo posterior, com o objetivo de obter uma projeção $\pi\colon V_\varepsilon(M) \to M$ com a mesma classe de diferenciabilidade que M.

Lembremos que $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$.

Definição. Dada uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ de classe ≥ 2, dizemos que uma vizinhança tubular $V_\varepsilon(M)$ é *equivalente ao espaço produto* $M \times B^n$ se existir um *homeomorfismo* $h\colon M \times B^n \to V_\varepsilon(M)$ tal que o diagrama

seja comutativo.

Nestas condições diremos que h é uma *equivalência*.

Proposição 7. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície de classe C^∞. Então cada uma das condições abaixo acarreta a seguinte:*

(1) *$M = f^{-1}(a)$, onde a é valor regular de uma aplicação de classe C^∞, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto.*

(2) *Existem em M n campos de vetores normais de classe C^∞, linearmente independentes em todos os pontos.*

(3)' *Existem em M n campos de vetores, de classe C^∞, transversais a M em todos os pontos.*

(3) *Toda vizinhança tubular de M é equivalente a um produto.*

Demonstração:
(1) $\Rightarrow$ (2). Basta tomar $v_i(p) = \operatorname{grad} f^i(p)$, $1 \leq i \leq n$.
(2) $\Rightarrow$ (2)$'$. Evidente.
(2) $\Rightarrow$ (3). Podemos supor que os n campos são unitários e dois a dois ortogonais. Seja $h\colon M \times B^n \to V_\varepsilon(M)$ o homeomorfismo definido por $h(x, \alpha^1, \ldots, \alpha^n) = x + \varepsilon(x) \Sigma\, \alpha^i v_i(x)$. Então h é uma equivalência.

Atenção: Provaremos mais adiante neste livro que a função $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$ pode ser tomada de mesma classe que a superfície M. Com isto seremos capazes de provar a implicação (3) $\Rightarrow$ (1), como se segue:

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V_\varepsilon(M) & \xrightarrow{\ h\,\in\, C^\infty\ } & M \times B^n & \xrightarrow{\ \pi_2\ } & B^n \\ & {\scriptstyle \pi} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \pi_1} & \\ & & M & & \end{array}$$

Seja $f = \pi_2 \circ h^{-1}\colon V_\varepsilon(M) \to B^n$. Então $0 \in \mathbb{R}^n$ é valor regular de $f \in C^\infty$ e $M = f^{-1}(0)$.

Aplicações

1) Na Seção 3 vimos que a faixa de Moebius não pode ser definida implicitamente. Isto também decorre da Proposição 7, pois não existe homeomorfismo $h\colon M \times (-1, 1) \to V_\varepsilon(M)$, onde $V_\varepsilon(M)$ é

qualquer vizinhança tubular da faixa de Moebius. Com efeito, $V_\varepsilon(M)-M$ é conexo (verifique!) enquanto que $h^{-1}(V_\varepsilon(M)-M) = M \times (-1,1) - M \times \{0\}$ não é conexo.

2) Admitindo o enunciado mais forte da Proposição 7, a ser demonstrado posteriormente, podemos provar que *todo grupo de Lie de matrizes pode ser definido como imagem inversa de um valor regular*. Sejam $G^m \subset \mathbb{R}^{n^2}$, um grupo de Lie de matrizes de codimensão $k = n^2 - m$ e $X \in G$ um elemento diferente de I. Consideremos a aplicação $\varphi_X\colon \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ dada por $\varphi_X(Y) = XY$. φ_X é um difeomorfismo de classe C^∞, cujo inverso é $\varphi_{X^{-1}}$. Além disso $\varphi_X(G) = G$. O isomorfismo $\varphi'_X(I)\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, dado por $Y \mapsto XY$, leva $(TG)_I$ em $(TG)_X$. Escolhamos $\{A_1,\ldots,A_k\}$, base de um suplemento de $(TG)_I$ em $\mathbb{R}^{n^2}$. Então $XA_1,\ldots,XA_k$ é base de um suplemento de $(TG)_X$. Em suma, os $k = n^2 - m$ campos $v_i(X) = X \cdot A_i$ são transversais a G em todos os seus pontos.

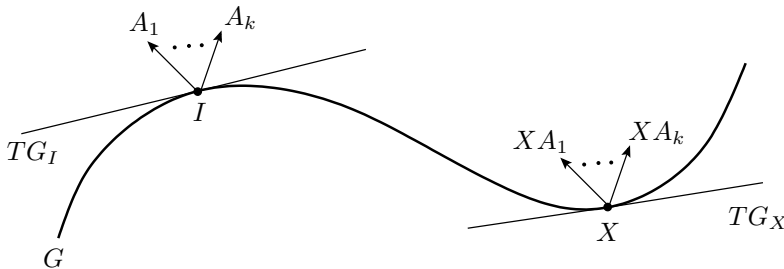



Figura 3.15.

Observação: A solução acima obtida para o problema de caracterizar as superfícies que podem ser definidas "implicitamente" é

devida a H. Whitney (Annals of Math. 37 (1936) pg. 865). Ela representa tudo o que se pode dizer sem usar os métodos da topologia algébrica. Fica faltando saber em que condições sobre M uma vizinhança tubular $V_\varepsilon(M)$ é equivalente a um produto. Como vimos, M deve ser orientável. Mas tal condição está muito longe de ser suficiente. Para abordar este problema de maneira eficiente é indispensável considerar as *classes características* da superfície M. A literatura sobre este assunto é vasta. Veja-se, por exemplo, N. Steenrod – "The Topology of Fibre Bundles-- (Princeton Univ. Press, 1951). No caso presente, o problema deve ser enunciado do seguinte modo:

"Em que condições um espaço topológico X é homeomorfo a uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ que possui uma vizinhança tubular equivalente a um produto?" Tais espaços topológicos foram estudados por J.H.C. Whitehead, que os chamou de π-variedades (Annals of Math. 41 (1940) pg. 825). Ver também as notas de J. Milnor "Differential Topology.

Capítulo IV

Variedades Diferenciáveis

A noção de superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, desenvolvida nos capítulos anteriores, ainda que adequada para muitos propósitos, possui contudo dois inconvenientes. O primeiro é de caráter estético: não se pode pensar na superfície em si mesma, sem fazer referência ao espaço euclidiano que a contém. O segundo inconveniente é de ordem prática: existem na natureza objetos importantes, semelhantes a superfícies, que não se apresentam contidos num espaço euclidiano. Tais são, por exemplo, os espaços projetivos (como o P^2, introduzido no Capítulo III e artificiosamente imerso em $\mathbb{R}^4$) e, mais geralmente, as variedades Grassmanianas.

A grosso modo, uma variedade diferenciável é como uma superfície, só que não precisa estar contida em um espaço euclidiano.

1 Sistemas de coordenadas locais

Seja M um espaço topológico. Um *sistema de coordenadas locais* ou *carta local* em M é um homeomorfismo $x\colon U \to x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Dizemos que m é a *dimensão* de $x\colon U \to x(U)$.

Para cada $p \in U$ tem-se $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$. Os números $x^i = x^i(p)$, $i = 1, \dots, m$ são chamados as *coordenadas* do ponto $p \in M$ no sistema x.

Exemplos:

1) **Coordenadas cartesianas**

Sejam $M = \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ a aplicação de inclusão, $x(p) = p$. As coordenadas introduzidas em U pelo sistema x são denominadas "coordenadas cartesianas".

2) **Coordenadas polares**

Sejam $M = \mathbb{R}^2$, α um número real arbitrário e $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ o complementar da semi-reta $r = \{(t\cos\alpha, t\,\mathrm{sen}\,\alpha).t \geq 0\}$.

Construimos um sistema de coordenadas locais $x\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^2$ como se segue: Consideramos a faixa $V_\alpha = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; \rho > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}$ e definimos $\varphi\colon V_\alpha \to U_\alpha$ por $\varphi(\rho, \theta) = \rho\, e^{i\theta} = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$. É claro que φ é uma bijeção contínua (a rigor, C^∞). Aplicando o teorema da função inversa vê-se que φ é um difeomorfismo; seja $x\colon U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ o difeomorfismo inverso de φ.

As coordenadas introduzidas em U_α chamam-se "coordenadas polares".

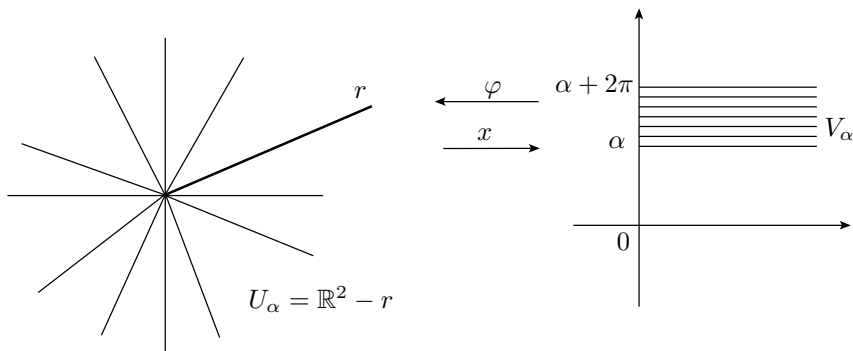



Figura 4.1.

3) **Parametrizações de superfícies**

Seja $\varphi\colon U_0 \to U$ uma parametrização do subconjunto aberto U, contido na superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$. O homeomorfismo inverso $x = \varphi^{-1}\colon U \to U_0 \subset \mathbb{R}^m$ é um sistema de coordenadas locais em M.

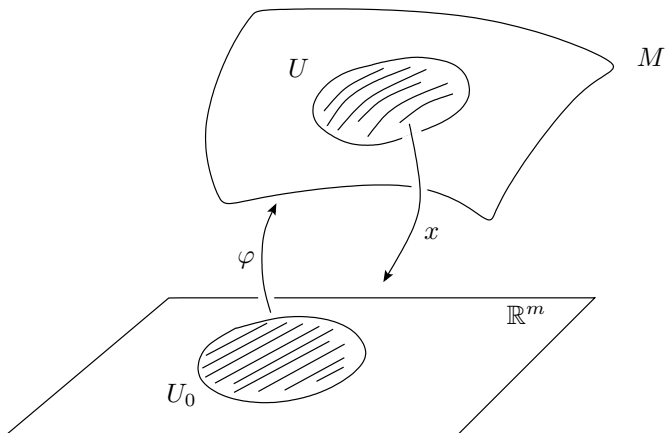



Figura 4.2.

Um *atlas* de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção $\mathfrak{A}$ de sistemas de coordenadas locais $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em

M, cujos domínios U cobrem M. Os domínios U dos sistemas de coordenadas $x \in \mathfrak{A}$ são chamados as *vizinhanças coordenadas* de $\mathfrak{A}$.

Por exemplo, os sistemas de coordenadas que são os inversos das parametrizações em uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ formam um atlas de dimensão m sobre M.

Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma *variedade topológica* de dimensão m. Em outras palavras, M é uma variedade topológica de dimensão m se, e somente se, cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$.

Exemplos:

1) Seja X um conjunto qualquer. Consideremos em X a topologia discreta. A família de funções $\varphi_x \colon \{x\} \to \{0\} \in \mathbb{R}^0$, onde $x \in X$, é um atlas de dimensão 0 em X.

2) Toda superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade topológica de dimensão m.

Observação: Sejam M um espaço topológico e $\mathfrak{A}$ uma coleção de cartas $x \colon U \to x(U) \subset \mathbb{R}^{m(x)}$, cujos domínios U formam uma cobertura aberta de M. É possível provar que a dimensão m das cartas locais é constante em cada componente conexa de M (teorema da invariância da dimensão). Na definição que demos a constância de m é postulada. Em todos os casos que consideraremos a seguir, (variedades diferenciáveis) o fato de m ser constante decorre imediatamente do teorema da função inversa.

2 Mudança de coordenadas

Dados os sistemas de coordenadas locais $x \colon U \to \mathbb{R}^m$ e $y \colon V \to \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M, tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto

$p \in U \cap V$ tem coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^i = y^i(p)$ relativamente ao sistema y.

A correspondência

$$(x^1(p), \dots, x^m(p)) \longleftrightarrow (y^1(p), \dots, y^m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} \colon x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ que é chamado *mudança de coordenadas.*

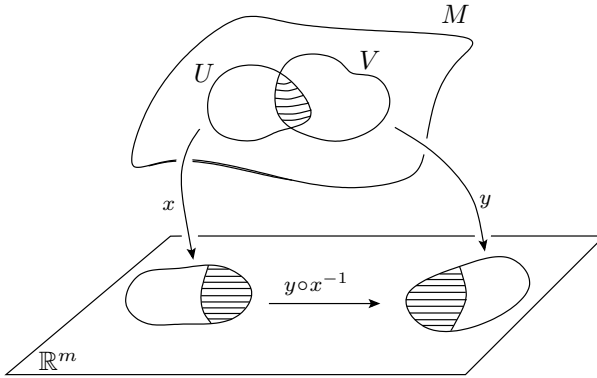



Figura 4.3.

Se $z \colon W \to \mathbb{R}^m$ é outro sistema de coordenadas locais tal que $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ então

$$\varphi_{xz} = \varphi_{yz} \circ \varphi_{xy} \colon x(U \cap V \cap W) \to z(U \cap V \cap W).$$

Tem-se $\varphi_{xx} = \mathrm{id}_{x(U)}$ e $\varphi_{xy} = (\varphi_{yx})^{-1}$.

3 Variedades Diferenciáveis

Um atlas $\mathfrak{A}$ sobre um espaço topológico M diz-se *diferenciável, de classe* C^k $(k \geq 1)$, se todas as mudanças de coordenadas φ_{xy}, $x, y \in \mathfrak{A}$ são aplicações de classe C^k. Escreve-se então

$\mathfrak{A} \in C^k$. Como $\varphi_{yx} = (\varphi_{xy})^{-1}$, segue-se que os φ_{xy} são, de fato, difeomorfismos de classe C^k. Em particular, se escrevemos $\varphi_{xy}\colon (x^1, \ldots, x^m) \mapsto (y^1, \ldots, y^m)$, então o determinante jacobiano $\det\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ é não-nulo em todo ponto de $x(U \cap V)$.

Seja $\mathfrak{A}$ um atlas de dimensão m e classe C^k num espaço topológico M. Um sistema de coordenadas $z\colon W \to \mathbb{R}^n$ em M diz-se *admissível* relativamente ao atlas $\mathfrak{A}$ se, para todo sistema de coordenadas locais $x\colon U \to \mathbb{R}^m$, pertencente a $\mathfrak{A}$, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas φ_{xz} e φ_{zx} são de classe C^k. Em outras palavras, se $\mathfrak{A} \cup \{z\}$ é ainda um atlas de classe C^k em M.

Exemplos:

1) Se $\mathfrak{A}$ é um atlas de classe C^k em M e $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ pertence a $\mathfrak{A}$ então, para cada subconjunto aberto $V \subset U$, a restrição $y = x|V$ é admissível em relação a $\mathfrak{A}$. Se $\xi\colon x(U) \to \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo de classe C^k, então $\xi \circ x\colon U \to \mathbb{R}^m$ é admissível relativamente a $\mathfrak{A}$.

2) Seja $\mathfrak{A}$ o atlas de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ que consiste de uma única carta local $x = \mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seja $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o sistema de coordenadas dado por $z(t) = t^3$. Então z não é admissível em relação a $\mathfrak{A}$ pois, embora $\varphi_{xz}(t) = t^3$ seja de classe C^∞, $\varphi_{zx}(t) = t^{1/3}$ não é diferenciável em $t = 0$.

Um atlas $\mathfrak{A}$, de dimensão m e classe C^k, sobre M, diz-se *máximo* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a $\mathfrak{A}$. Todo atlas de classe C^k em M pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas máximo de classe C^k: basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Definição. Uma *variedade diferenciável*, de dimensão m e classe C^k é um par ordenado $(M, \mathfrak{A})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathfrak{A}$ é um atlas máximo de

dimensão m e classe C^k sobre M.

A exigência de que o atlas seja máximo não é essencial mas é conveniente. Em alguns contextos admitem-se variedades não-Hausdorff ou sem base enumerável. Na realidade, porém, os teoremas mais importantes exigem estas hipóteses. É o caso dos teoremas de imersão de Whitney, que veremos no Capítulo X.

Em termos mais explícitos, para provar que $(M, \mathfrak{A})$ é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k devemos verificar que

i) M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.

ii) $\mathfrak{A}$ é uma coleção de homeomorfismos $x\colon U \to \mathbb{R}^m$, de conjuntos abertos $U \subset M$ sobre abertos $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.

iii) Os domínios U dos homeomorfismos $x \in \mathfrak{A}$ cobrem M.

iv) Dados $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ e $y\colon V \to \mathbb{R}^m$ pertencentes a $\mathfrak{A}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, então $\varphi_{xy}\colon x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ é um homeomorfismo de classe C^k.

v) Dado um homeomorfismo $z\colon W \to \mathbb{R}^m$ de um aberto $W \subset M$ sobre um aberto $z(W) \subset \mathbb{R}^m$, tal que φ_{zx} e φ_{xz} são de classe C^k para cada $x \in \mathfrak{A}$, então $z \in \mathfrak{A}$.

Para todo $r \leq k$, uma variedade de classe C^k pode ser olhada como variedade de classe C^r, pois qualquer atlas de classe C^k está contido num único atlas máximo de classe C^r.

4 Exemplos de variedades

1) Os Espaços Euclidianos

Consideremos em $\mathbb{R}^m$ o atlas $\mathfrak{A}$ contendo o único sistema de coordenadas $x = \mathrm{id}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. É claro que $\mathfrak{A}$ é um atlas de classe

C^∞ e dimensão m em $\mathbb{R}^m$. Para cada $k = 0, 1, \ldots, \infty$ seja $\mathfrak{A}_k$ o atlas máximo de classe C^k em $\mathbb{R}^m$ que contém $\mathfrak{A}$. O par $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{A}_k)$ é uma variedade de dimensão m e classe C^k. Considerar o espaço $\mathbb{R}^m$ como variedade C^k significa admitir, em cada aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, não somente as coordenadas cartesianas dos seus pontos como também qualquer sistema de coordenadas "curvilíneas" $y \colon U \to \mathbb{R}^m$, dado por um difeomorfismo de classe C^k de U sobre o conjunto $y(U) \subset \mathbb{R}^m$, que é necessariamente aberto. É claro que $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\infty$. Quanto mais diferenciável quer-se o atlas, menos cartas locais são admissíveis.

Seja $\mathfrak{B}$ o atlas de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ que consta do único sistema de coordenadas $t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 \in \mathbb{R}$. O par $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞. Notemos que $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \neq (\mathbb{R}, \mathfrak{A}_\infty)$.

2) Subvariedades abertas

Um subconjunto aberto W de uma variedade C^k tem uma estrutura natural de variedade de classe C^k, dada pelo atlas máximo em W, formado por todos os sistemas de coordenadas admissíveis $x \colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, cujos domínios U estão contidos em W.

3) Superfícies em $\mathbb{R}^n$

Toda superfície de dimensão m e classe C^k, $M^m \subset \mathbb{R}^n$, é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k, com o atlas $\mathfrak{A}$ formado pelos sistemas de coordenadas $x \colon U \to \mathbb{R}^m$, inversos das parametrizações $\varphi \colon U_0 \subset \mathbb{R}^m \to U \subset M$, de classe C^k. A Proposição 1 do Capítulo II mostra que $\mathfrak{A}$ é um atlas de classe C^k. Na realidade, $\mathfrak{A}$ é um atlas máximo de classe C^k. De fato, seja $z \colon W \to z(W) \subset \mathbb{R}^m$ um sistema de coordenadas, admissível em relação a $\mathfrak{A}$. Então $\psi = z^{-1} \colon z(W) \subset \mathbb{R}^m \to W \subset M$ é um homeomorfismo. Para cada $p \in W$ existe uma parametrização $\varphi \colon U_0 \to U$, $p \in U \subset M$, de classe C^k. Como z é admissível,

$\varphi^{-1} \circ \psi \colon z(U \cap V) \to \varphi^{-1}(U \cap W)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Portanto, $\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \psi) \colon z(U \cap W) \to U \cap W$ é uma parametrização de classe C^k de uma vizinhança de p. Como $p \in W$ é arbitrário, segue-se que $\psi = z^{-1} \colon z(W) \to W$ é uma parametrização de classe C^k, i.e., $z \in \mathfrak{A}$. Então $\mathfrak{A}$ é máximo.

4) Produto de variedades

Sejam $(M^m, \mathfrak{A})$ e $(N^n, \mathfrak{B})$ variedades de classe C^k. Vamos introduzir no espaço topológico produto $M \times N$ uma estrutura de variedade de dimensão $m + n$ e classe C^k, por meio do atlas $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ formado pelso sistemas de coordenadas $x \times y \colon U \times V \to \mathbb{R}^{m+n}$, dados por $(x \times y)(p, q) = (x(p), y(q))$, $x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{B}$. Como $(x_1 \times y_1) \circ (x \times y)^{-1} = (x_1 \circ x^{-1}) \times (y_1 \circ y^{-1})$, segue-se que $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ é um atlas de classe C^k. Este atlas está contido num único atlas maximal de classe C^k, que define em $M \times N$ a estrutura de *variedade produto*.

5) O espaço projetivo real de dimensão n

Na geometria projetiva clássica, para simplificar o enunciado de vários teoremas, era costume acrescentar ao $\mathbb{R}^n$ um hiperplano ideal no infinito, como se segue: (1) Se dá a cada reta λ no $\mathbb{R}^n$ um único "ponto no infinito" p_λ. (2) A igualdade $p_\lambda = p_\mu$ ocorre se, e somente se, as retas λ e μ são paralelas. (3) O hiperplano H contém os pontos "ideais" p_λ e somente estes. A reunião $\mathbb{R}^n \cup H$ chamava-se o espaço projetivo de dimensão n.

Desejando aplicar métodos analíticos à geometria projetiva, considerava-se o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ imerso em $\mathbb{R}^{n+1}$, definido pela condição $x^{n+1} = 1$. Aparecia assim uma bijeção natural do espaço projetivo de dimensão n sobre o conjunto de todas as retas do $\mathbb{R}^{n+1}$ passando pela origem. Realmente, a cada ponto ordinário $p \in \mathbb{R}^n$ corresponde a reta que liga este ponto à origem; e a cada ponto "ideal" p_λ corresponde a reta, contida no hiperplano

$x^{n+1} = 0$, passando pela origem e paralela a λ. Por conseguinte, o espaço projetivo podia ser imaginado como o conjunto de todas as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$. Como cada reta do $\mathbb{R}^{n+1}$ intersecta a esfera unitária S^n em exatamente dois pontos antípodas, somos conduzidos à seguinte definição formal:

O *espaço projetivo real de dimensão* n é o espaço quociente da esfera unitária S^n pela relação de equivalência $p \sim q \Leftrightarrow p = \pm q$, $\forall\, p, q \in S^n$.

Os pontos de P^n são portanto os conjuntos

$$[p] = \{p, -p\}, \;\; p \in S^n.$$

Seja $\pi\colon S^n \to P^n$ a aplicação canônica $\pi(p) = [p]$. Damos a P^n a topologia quociente, isto é, a topologia co-induzida pela aplicação canônica. Em outras palavras, declaramos que o subconjunto $A \subset P^n$ é aberto quando $\pi^{-1}(A)$ é aberto em S^n. Então $\pi\colon S^n \to P^n$ é contínua. Além disso, dado um espaço topológico X, uma aplicação $f\colon P^n \to X$ é contínua se, e somente se, $f \circ \pi\colon S^n \to X$ é contínua.

Se $U \subset S^n$ é aberto então $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$ é aberto em S^n, logo $\pi(U) \subset P^n$ é aberto. Portanto $\pi\colon S^n \to P^n$ é uma aplicação aberta.

Mostremos que P^n pode ser munido da estrutura de variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞:

(1) Como S^n tem base enumerável e $\pi\colon S^n \to P^n$ é uma aplicação contínua e aberta, segue-se que P^n tem base enumerável (cf. Elon L. Lima, Elementos de Topologia Geral, pag. 337). Se $p \neq q \in S^n$ não são antípodas, existem vizinhanças $p \in V$ e $q \in W$ em S^n tais que $V \cap W = \emptyset$ e $V \cap (-W) = \emptyset$. Isto significa que $\pi(V)$ e $\pi(W)$ são vizinhanças disjuntas de $\pi(p)$ e $\pi(q)$, respectivamente. Logo P^n é de Hausdorff. Sendo ainda S^n compacta e π contínua, vê-se que o espaço projetivo $P^n = \pi(S^n)$ é compacto.

(2) P^n possui um atlas $[\mathfrak{A}]$, de classe C^∞ e dimensão n.

Seja $\mathfrak{A}$ o atlas C^∞ em S^n que consiste nos sistemas de coordenadas locais

$$x_i^\pm = (\varphi_i^\pm): \quad U_i^\pm \longrightarrow B_n(0,1) \subset \mathbb{R}^n$$
$$(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^{n+1})\,(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1})$$

(ver Seção 2).

Para cada $i = 1, \ldots, n+1$, a aplicação canônica $\pi\colon S^n \to P^n$ leva os hemisférios $U_i^\pm$ homeomorficamente sobre o mesmo subconjunto aberto $W_i \subset P^n$. Definimos um sistema de coordenadas locais $w_i\colon W_i \to \mathbb{R}^n$ por $w_i = x_i^+ \circ (\pi|U_i^+)^{-1}$, $i = 1, \ldots, n+1$.

A coleção $\mathfrak{A} = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$ é um atlas de dimensão n em P^n. Para provar que $\mathfrak{A} \in C^\infty$, observemos o seguinte. Dado $p \in W_i \cap W_j$, temos $p = \pi(x)$, para um único $x \in S^n$ tal que $x^i > 0$. Então $w_i(p) = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1})$. Se $x^j > 0$, então $x \in U_j^+$ e portanto $w_j(p) = (x^1, \ldots, x^{j-1}, x^{j+1}, \ldots, x^{n+1})$. Se, porém, for $x^j < 0$, então $-x \in U_j^+$ e portanto $w_j(p) = (-x^1, \ldots, -x^{j-1}, -x^{j+1}, \ldots, -x^{n+1})$. Segue-se que o domínio $w_j \circ w_i^{-1}$ é a reunião de dois abertos disjuntos, num dos quais $w_j \circ w_i^{-1} = x_j^+ \circ (x_i^+)^{-1}$ e, no outro, $w_j \circ w_i^{-1} = x_j^+ \circ \alpha \circ (x_i^+)^{-1}$, onde $\alpha(x) = -x$. Vê-se que $w_j \circ w_i^{-1} \in C^\infty$.

Para cada $k = 0, 1, \ldots, \infty$, indiquemos por $[\mathfrak{A}]_k$ o único atlas máximo de classe C^k que contém $\mathfrak{A}$. O par $(P^n, [\mathfrak{A}]_k)$ é o espaço projetivo real de dimensão n visto como variedade de classe C^k.

5 Variedades definidas por uma coleção de injeções

Seja X um conjunto. Se X possui estrutura de variedade diferenciável, então sua topologia fica perfeitamente determinada pelo atlas. De modo preciso:

Lema 1. *Sejam X um conjunto (sem estrutura topológica) e $\mathfrak{A}$ uma coleção de injeções $x\colon U \subset X \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) *Para cada $x \in \mathfrak{A}$, $x\colon U \to \mathbb{R}^n$, $x(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.*

(2) *Os domínios U das aplicações $x \in \mathfrak{A}$ cobrem X.*

(3) *Se $x\colon U \to \mathbb{R}^n$ e $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ pertencem a $\mathfrak{A}$ e $U \cap V \neq \emptyset$, então $x(U \cap V)$ e $y(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e a aplicação $y \circ x^{-1}\colon x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ é de classe C^k. (Segue-se que $y \circ x^{-1} = (x \circ y^{-1})^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k).*

Nestas condições, existe uma e somente uma topologia em X relativamente à qual $\mathfrak{A}$ é um atlas de classe C^k em X.

Demonstração: **Unicidade**. Seja τ uma topologia em X tal que $\mathfrak{A}$ é um atlas de classe C^k sobre (X, τ). Então os domínios U dos homeomorfismos $x\colon U \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$ são elementos de τ e cobrem X. Se $A \subset X$ é aberto então $A \cap U \in \tau$ logo $x(A \cap U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, se $A \subset X$ é tal que $x(A \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para todo $x \in \mathfrak{A}$, então $A = \bigcup_{x \in \mathfrak{A}} x^{-1}(x(A \cap V))$ é aberto em X. Conclusão: $A \in \tau \Leftrightarrow x(A \cap U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para cada $x \in \mathfrak{A}$. Isto mostra a unicidade de τ e nos dá uma pista para demonstrar a

Existência. Declaramos um subconjunto $A \subset X$ aberto se, e somente se, $x(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto para todo $x\colon U \to \mathbb{R}^n$ em $\mathfrak{A}$. Deixamos como exercício para o leitor verificar, usando as condições (1), (2) e (3), que isto define realmente uma topologia em X, segundo a qual cada conjunto $U \subset X$ é aberto e cada $x\colon U \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo.

A topologia de uma variedade M pode ser visualizada assim: se um ponto variável $p \in M$ tende para um ponto $p_0 \in M$, e se $x\colon U \to \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas locais em p_0, mais cedo ou mais tarde o ponto p estará em U e $x(p)$ tenderá para $x(p_0)$ no $\mathbb{R}^n$.

Devemos adicionar mais hipóteses ao Lema 1 se desejamos que a topologia de X tenha base enumerável.

Lema 2. *A topologia X, definida pelo "atlas" $\mathfrak{A}$ satisfazendo* (1), (2) *e* (3) *tem base enumerável se, e somente se*

(4) *A cobertura de X por meio dos domínios U das aplicações $x \in \mathfrak{A}$ admite subcobertura enumerável.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se (4) se verifica então X é união enumerável de abertos U, cada um dos quais tem base enumerável sendo homeomorfo a um aberto do $\mathbb{R}^n$. Logo X tem base enumerável.

($\Leftarrow$) Resulta do conhecido Teorema de Lindelöf: Num espaço topológico com base enumerável, toda cobertura aberta admite uma subcobertura enumerável.

Observação: A topologia de X, obtida de acordo com o Lema 1, é localmente de Hausdorff. Quer dizer, se $p \neq q$ são pontos de X pertencentes ao mesmo domínio U de uma aplicação $x \in \mathfrak{A}$, então p e q possuem vizinhanças disjuntas pois U é aberto em X e é homeomorfo ao espaço de Hausdorff $x(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Em cada caso concreto, a aplicação dos Lemas 1 e 2 com o propósito de definir uma estrutura de variedade diferenciável deve ser seguida de investigação sobre a Hausorffcidade da topologia de X. Esta investigação poderá ser abreviada usando o

Lema 3. *A topologia de X, definida por um "atlas" $\mathfrak{A}$ satisfazendo* (1), (2) *e* (3) *é de Hausdorff se, e somente se, cumpre:*

(5) *Para qualquer par de sistemas de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$, $y\colon V \to \mathbb{R}^m$ com $U \cap V \neq \emptyset$, não existe seqüência de pontos $z_i \in x(U \cap V)$ tal que $z_i \to z \in x(U - V)$ e $(y \circ x^{-1})(z_i) \to z' \in y(V - U)$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se a topologia de X não é de Hausdorff então existem pontos $p \neq q \in X$ com a propriedade: toda vizinhança de p e toda vizinhança de q têm interseção não vazia.

Consideremos sistemas de coordenadas $x\colon U \to x(U) \subset \mathbb{R}^m$ em p e $y\colon V \to y(V)$ em q. Então $U \cap V \neq \emptyset$. Como a topologia de X é localmente de Hausdorff, necessariamente $p \notin V$ e $q \notin U$. Sejam $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de p e $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots$ um sistema fundamental de vizinhanças de q. Escolhamos, para cada i, $p_i \in V_i \cap U_i$. Então $x(p_i) = z_i \to x(p) \in x(U - V)$ e $y \circ x^{-1}(z_i) = y(p_i) \to y(q) \in y(V - U)$.

($\Leftarrow$) Se existem sistemas de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ e $y\colon V \to \mathbb{R}^m$, com $U \cap V \neq \emptyset$ e seqüência de pontos $z_i \in x(U \cap V)$ tais que $z_i \to z \in x(U - V)$ e $(y \circ x^{-1})(z_i) \to z' \in y(V - U)$ então $x^{-1}(z_i) \to p = x^{-1}(z) \in U - V$ e $y^{-1}(y \circ x^{-1}(z_i)) = x^{-1}(z_i) \to q = y^{-1}(z') \in V - U$. Como $p \neq q$ a seqüência $x^{-1}(z_i)$ tem dois "limites". Logo X não é de Hausdorff.

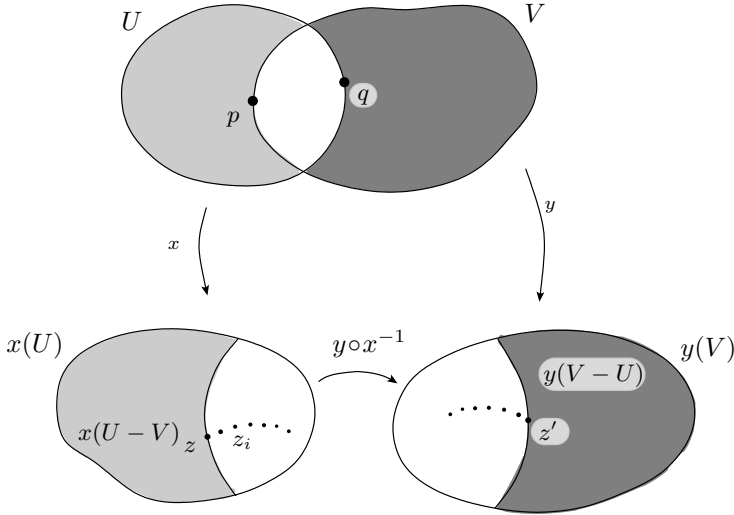



Figura 4.4.

Exemplos:

1) **Variedades não-Hausdorff**

A topologia de X dada pelo Lema 1 é, como vimos, localmente de Hausdorff.

Nem sempre, porém, o atlas $\mathfrak{A}$ define uma topologia de Hausdorff em X.

Vejamos um exemplo. Seja $X = A \cup B \cup C$, onde $A = \{(s,1) \in \mathbb{R}^2; s \leq 0\}$, $B = \{(s,-1) \in \mathbb{R}^2; s \leq 0\}$ e $C = \{(s,0) \in \mathbb{R}^2; s > 0\}$.

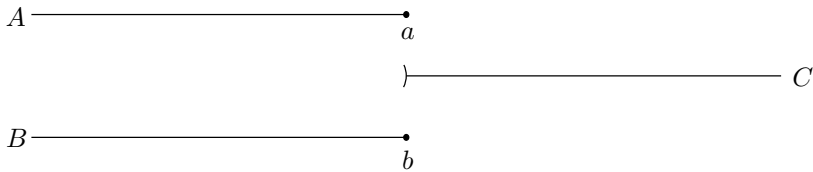



Figura 4.5.

Consideremos o atlas $\mathfrak{A} = \{x, y\}$ sobre X, onde $x\colon A \cup C \to \mathbb{R}$ é dada por $x(s,t) = s$ e $y\colon B \cup C \to \mathbb{R}$ é definida por $y(s,t) = s$.

As condições (1), (2) e (3) do Lema 1 são claramente satisfeitas (com $k = \infty$), mas a topologia de X definida pelo atlas $\mathfrak{A}$ não é de Hausdorff: duas quaisquer vizinhanças dos pontos $a = (0,1)$ e $b = (0,-1)$ em X têm pontos em comum.

Este exemplo não é tão artificial quanto possa parecer. X é homeomorfo ao espaço quociente $\mathbb{R}^2/E$ do plano $\mathbb{R}^2$ pela relação de equivalência E cujas classes são as retas verticais $x =$ constante, $|x| \geq 1$, e os gráficos das funções $g_a(x) = (1-x^2)^{-1} + a$, $|x| < 1$, $a \in \mathbb{R}$ arbitrário.

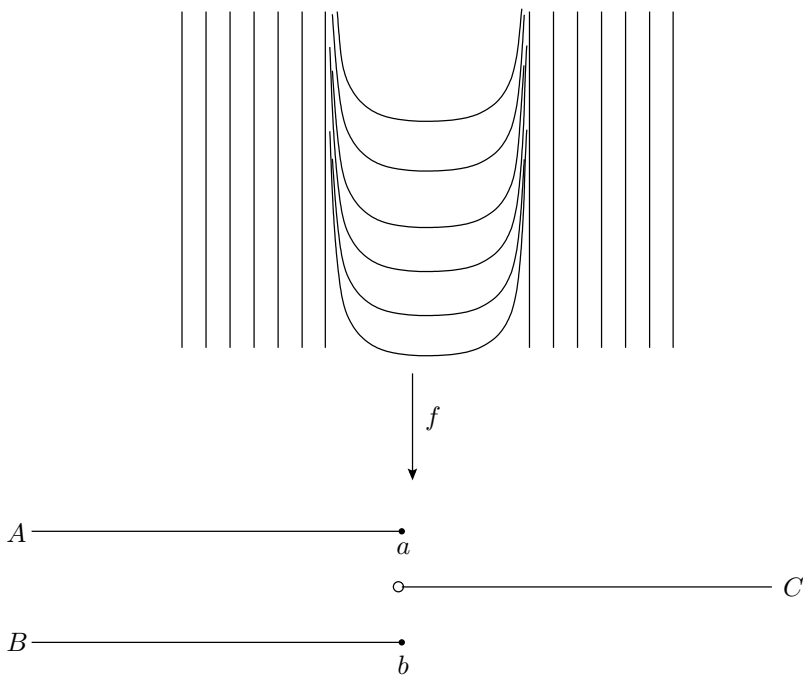



Figura 4.6.

Com efeito: Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to X$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (1-x,1) \in A, & \text{se} \quad x \geq 1 \\ (x+1,-1) \in B, & \text{se} \quad x \leq -1 \\ (e^a,0) \in C, & \text{se} \quad (x,y) \in \ \text{Graf}(g_a) \end{cases}$$

É fácil ver que E é a relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$ definida por φ.

Consideremos a aplicação canônica $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/E$ e a bijeção $\bar{f}\colon \mathbb{R}^2/E \to X$ definida por $\bar{f}(\varphi(x,y)) = f(x,y)$.

Como f é contínua e aberta, segue-se que a topologia de X é a co-induzida por f. Resulta daí que $\bar{f}\colon \mathbb{R}^2/E \to X$ é um homeomorfismo.

A seguir, apresentaremos outro exemplo de "variedade" de dimensão 1 que não é de Hausdorff.

Seja $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \{a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{14}\}$, onde $A_1 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$, $A_2 = \{(-x,x) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$, $A_3 = -A_1$, $A_4 = -A_2$, $a_{12} = (0,1)$, $a_{23} = (-1,0)$, $a_{34} = (0,-1)$ e $a_{14} = (1,0)$.

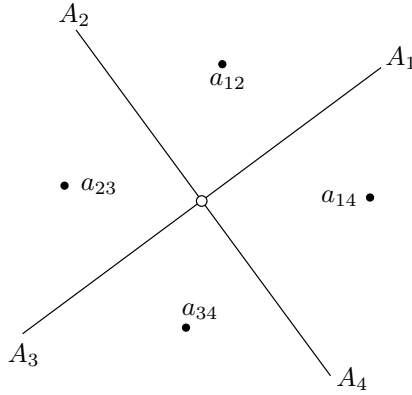



Figura 4.7.

Consideremos o atlas $\mathfrak{A} = \{x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{14}\}$ sobre X definido por

$$\begin{aligned} x_{12} \colon A_1 \cup a_{12} \cup A_2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \\ x_{23} \colon A_2 \cup a_{23} \cup A_3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y \\ x_{34} \colon A_3 \cup a_{34} \cup A_4 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \\ x_{14} \colon A_1 \cup a_{14} \cup A_4 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

As condições (1), (2) e (3) do Lema 1 são claramente satisfeitas (com $k = \infty$) mas a topologia de X definida pelo atlas $\mathfrak{A}$ não é de Hausdorff: duas quaisquer vizinhanças dos pontos a_{12} e a_{23} têm em comum pontos de A_2. Apesar de parecer o contrário, este

exemplo é ainda menos artificial do que o anterior, pois o espaço topológico X que acabamos de definir é o quociente de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ pela relação de equivalência cujas classes são as órbitas do sistema de equações diferenciais $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$. Como se sabe, a órbita deste sistema que passa pelo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ é a curva parametrizada $t \mapsto (x \cdot e^t, y \cdot e^{-t})$. Com exceção dos pontos $(x, 0)$ e $(0, y)$, localizado sobre os eixos, tais curvas são ramos de hipérbole:

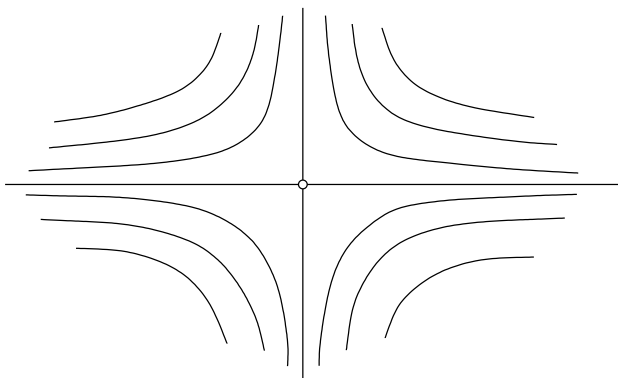



Figura 4.8.

2) **Espaços Projetivos** (bis)

Encaremos o espaço projetivo P^n como o conjunto de todas as retas $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem.

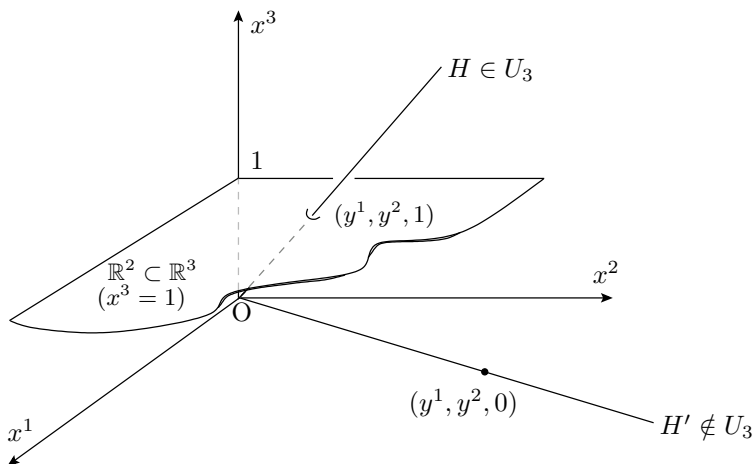



Figura 4.9.

Os elementos $H \in P^n$ podem ser descritos por um sistema de *coordenadas homogêneas*. Cada vetor não-nulo $v = (y^1, \dots, y^{n+1}) \in H$ é uma base de H e para cada real $t \neq 0$, tv é ainda uma base de H. As coordenadas $y^1, \dots, y^{n+1}$, definidas a menos de um fator arbitrário $t \neq 0$, se chamam as coordenadas homogêneas de H.

Podemos introduzir *coordenadas não-homogêneas* em P^n desde que trabalhemos localmente. Para cada $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$, seja U_α o conjunto de todas as retas, passando pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$, cujas coordenadas homogêneas $y^1, \dots, y^{n+1}$ satisfazem a condição $y^\alpha \neq 0$. Seja $x_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ definida por $x_\alpha(H) = (y^\alpha)^{-1}(y^1, \dots, y^{\alpha-1}, y^{\alpha+1}, \dots, y^{n+1})$. Geometricamente, $x_\alpha(H) \in \mathbb{R}^n$ é obtida pela interseção da reta H com o hiperplano $y^\alpha = 1$, omitindo-se depois a α-ésima coordenada. Afirmação: a família $\mathfrak{A} = \{x_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n \mid \alpha = 1, \dots, n+1\}$ satisfaz as condições dos lemas anteriores, ou seja:

1) $x_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ é uma bijeção, para cada $\alpha = 1, \dots, n+1$.

2) Os domínios U_α cobrem P^n.

3) Seja $\alpha < \beta$. Então

$$U_\alpha \cap U_\beta = \{H \in P^n; \forall\, v = (y^1, \ldots, y^{n+1}) \in H - \{0\}, y^\alpha \neq 0 \neq y^\beta\},$$

logo

$$x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \{y \in \mathbb{R}^n; y^{\beta-1} \neq 0\}$$

e

$$x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) = \{y \in \mathbb{R}^n; y^\alpha \neq 0\}$$

são abertos do $\mathbb{R}^n$. Além do mais,

$$x_\beta \circ (x_\alpha)^{-1} \colon x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é um difeomorfismo de classe C^∞ definido por

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^{\beta-1})^{-1} \cdot (x^1, \ldots, x^{\alpha-1}, 1, x^\alpha, \ldots, x^{\beta-2}, x^\beta, \ldots, x^n).$$

4) A cobertura de P^n por meio dos U_α é finita.

5) Sejam $\alpha < \beta$ e $z_i \in x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ uma seqüência tendendo para $x \in x_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$. Se indicamos $z_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$ então a seqüência de números reais $(x_i^{\beta-1})_{i\in\mathbb{N}}$ converge para zero, pois $z^{\beta-1} = 0$. Por conseguinte, a seqüência

$$x_\beta \circ (x_\alpha)^{-1}(z_i) = (x_i^{\beta-1})^{-1}(x_i^1, \ldots, x_i^{\alpha-1}, 1, x_i^\alpha, \ldots, x_i^{\beta-2}, x_i^\beta, \ldots, x_i^n)$$

não converge. Logo a topologia de P^n é de Hausdorff.

6 Variedades de Grassmann

A *variedade de Grassmann* $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão r do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+r}$.

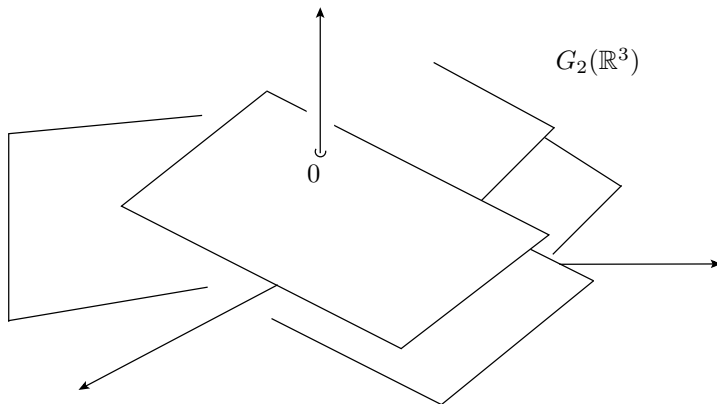



Figura 4.10.

Em particular, $P^n = G_1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Os elementos $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ podem ser descritos por *coordenadas homogêneas*, dadas por uma matriz real $(n+r)\times r$, $Y = (y^i_j)$, de posto r, cujas colunas $v_1 = (y^1_1, \dots, y^{n+r}_1), \dots, v_r = (y^1_r, \dots, y^{n+r}_r)$ formam uma base de H. É fato conhecido que todas as outras bases de H são da forma $w_1 = \sum\limits_{k=1}^{r} a^k_1\, v_k, \dots, w_r = \sum\limits_{k=1}^{r} a^k_r\, v_k$, onde $A = (a^i_j)$ é uma matriz $r \times r$ invertível. Então as coordenadas homogêneas YA, $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^r)$, do elemento $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$, estão definidas a menos de multiplicação à direita por uma matriz invertível $r \times r$.

Podemos introduzir *coordenadas não-homogêneas* em $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$, desde que trabalhemos localmente. Estabeleçamos primeiro algumas notações.

Dados um subconjunto $\alpha = \{i_1 < \cdots < i_r\} \subset \{1,\ldots,n+r\}$ com r elementos e uma matriz $Y \in M((n+r)\times r)$, denotamos por $\alpha(Y)$ a submatriz $r \times r$ de Y formada pelas linhas de ordem $i_1, \ldots, i_r$. Analogamente, indicamos por α^* o complementar de α em $\{1,\ldots,n+r\}$ e $\alpha^*(Y)$ a submatriz $n \times r$ de Y formada pelas linhas que não foram usadas em $\alpha(Y)$. Valem as equações:

$$\alpha(Y \cdot A) = \alpha(Y)\cdot A \quad \text{e} \quad \alpha^*(Y\cdot A) = \alpha^*(Y)\cdot A.$$

Para cada $\alpha = \{i_1, \ldots, i_r\}$ como acima, seja $U_\alpha \subset G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ o conjunto de todos os r-planos $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ tais que a projeção ortogonal $\pi_\alpha \colon \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}^r_\alpha$ sobre o subespaço gerado pelos vetores básicos $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ leva H isomorficamente sobre $\mathbb{R}^r_\alpha$. Isto significa que para cada matriz Y de coordenadas homogêneas de H, $\alpha(Y)$ é invertível.

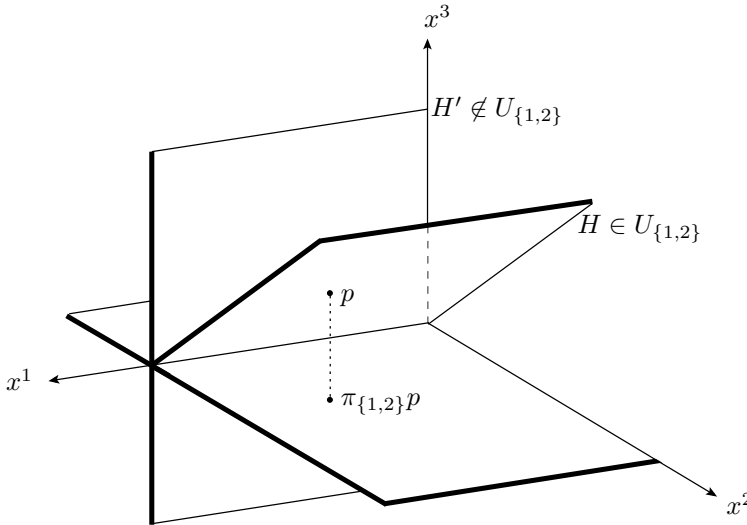



Figura 4.11.

Vamos definir agora uma bijeção $x_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^{nr}$ que será um sistema de coordenadas locais em $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$. Os valores de

x_α serão dados como matrizes $n \times r$, como se segue: dado um subespaço $H \in U_\alpha$, seja Y uma qualquer matriz de coordenadas homogêneas de H. Escrevemos $x_\alpha(H) = \alpha^*(Y \cdot \alpha(Y)^{-1}) = \alpha^*(Y) \cdot \alpha(Y)^{-1}$.

Notemos que $Y_0 = Y \cdot \alpha(Y)^{-1})$ é a única matriz de coordenadas homogêneas de H tal que $\alpha(Y_0) = I_r$. Então x_α está bem definida. Além disso, x_α é $1-1$: se $H, K \in U_\alpha$ são representados por matrizes Y_0, Z_0 com $\alpha(Y_0) = \alpha(Z_0) = I_r$ e $x_\alpha(H) = x_\alpha(K)$, então $\alpha^*(Y_0) = \alpha^*(Z_0)$, logo $Y_0 = Z_0$, donde $H = K$. Notemos finalmente que $x_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^{nr}$: dada uma matriz $W \in \mathbb{R}^{nr}$, seja $\widetilde{W}$ a única matriz $(n+r) \times r$ tal que $\alpha^*(\widetilde{W}) = W$ e $\alpha(\widetilde{W}) = I_r$. É claro que $\widetilde{W}$ tem posto r. Seja H o subespaço do $\mathbb{R}^{n+r}$ gerado pelas colunas de $\widetilde{W}$. Então $H \in U_\alpha$ e $x_\alpha(H) = W$.

Apliquemos os lemas da Seção 3 para mostrar que $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ é uma variedade de classe C^∞ e dimensão nr, compacta. As duas primeiras afirmações são óbvias:

(1) Cada $x_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^{nr}$ é uma bijeção.

(2) Os domínios U_α cobrem $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$.

(3) Sejam α, β dois subconjuntos de $\{1, \dots, n+r\}$, com r elementos, tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Consideremos as aplicações contínuas $\tilde{\alpha} \colon M(n \times r) \to M(n+r) \times r)$, dada por $\tilde{\alpha}(W) = \widetilde{W}$ $(\alpha^*(\widetilde{W}) = W$, $\alpha(\widetilde{W}) = I_r)$, e $\beta \colon M((n+r) \times r) \to M(r \times r)$, $Y \mapsto \beta(Y)$. Então $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = (\beta \circ \tilde{\alpha})^{-1}[\mathrm{GL}(\mathbb{R}^r)]$. Conseqüentemente, $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é aberto em $\mathbb{R}^{nr}$. Além disso, dada $W \in M(n \times r)$, o subespaço $H = x_\alpha^{-1}(W)$ tem por base as colunas da matriz $\widetilde{W} = \tilde{\alpha}(W)$. Logo $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(W) = \beta^*(\tilde{\alpha}(W)) \cdot \beta(\tilde{\alpha}(W))^{-1}$. Isto evidencia claramente que a mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} \colon x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é de classe C^∞.

(4) Pelo Lema 1, as $\binom{n+r}{r}$ bijeções $x_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^{nr}$ definem uma topologia em $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$, em relação à qual formam um atlas $\mathfrak{A}$ de classe C^∞. Como $\mathfrak{A}$ é finito, esta topologia possui base enumerável.

(5) $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ é um espaço de Hausdorff.

Sejam $\alpha \neq \beta$ e $W_i \in x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ uma seqüência tendendo para $W \in x_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$. Então $\beta(\tilde{\alpha}(W))$ não é invertível. Logo a seqüência $[\beta(\tilde{\alpha}(W_i))]^{-1}$ não converge e portanto $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(W_i) = \beta^*(\tilde{\alpha}(W_i)) \cdot [\beta(\tilde{\alpha}(W_i))]^{-1}$ não converge.

A variedade de Grassmann é *compacta*. Com efeito, seja $V_r(\mathbb{R}^{n+r})$ o conjunto de todas as matrizes $(r+n) \times r$ de posto r. Para cada $Y \in V_r(\mathbb{R}^{n+r})$ seja $H = \pi(Y)$ o subespaço gerado pelas colunas de Y. Isto define uma aplicação natural

$$\pi \colon V_r(\mathbb{R}^{n+r}) \to G_r(\mathbb{R}^{n+r}).$$

Provemos inicialmente que π é contínua: para cada $\alpha = \{i_1, \ldots, i_r\}$, denotamos por $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ o conjunto de todas as matrizes $Y \in V_r(\mathbb{R}^{n+r})$ tais que $\alpha(Y)$ é invertível. Como V_α é aberto em $V_r(\mathbb{R}^{n+r})$, basta provar que $\pi|V_\alpha$ é contínua. Considerando o sistema de coordenadas $x_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^{rn}$, vê-se que $x_\alpha \circ (\pi|V_\alpha) \colon Y \mapsto \alpha^*(Y) \cdot \alpha(Y)^{-1}$. Logo $\pi|V_\alpha$ é contínua.

Consideremos agora o conjunto C de todas as matrizes $(n+r) \times r$ cujas colunas $v_1, \ldots, v_r$ satisfazem a condição $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. Evidentemente C é fechado e limitado em $\mathbb{R}^{(n+r)r}$, logo compacto. Como cada $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ possui uma base ortonormal, $G_r(\mathbb{R}^{n+r}) = \pi(C)$ é compacto.

Nota: Apresentamos agora um modo intrínseco de introduzir coordenadas locais em $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$. Para cada par $\alpha = (E, F)$ de subespaços do $\mathbb{R}^{n+r}$ com $E \oplus F = \mathbb{R}^{n+r}$ e $\dim E = r$, seja U_α o conjunto de todos os $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ tais que $H \cap F = \{0\}$. Isto

significa que a projeção $\pi_E\colon E \oplus F \to E$ leva H isomorficamente sobre E.

Definimos os sistemas de coordenadas

$$x_\alpha\colon U_\alpha \to \mathcal{L}(E, F)$$

pela regra $x_\alpha(H) = \pi_F \circ (\pi_E|H)^{-1}\colon E \to F$. Geometricamente, $x_\alpha(H) = u$ é a transformação linear de E em F cujo gráfico é H (ver Figura 4.12).

Figura 4.12.

Nesta versão aparece uma novidade: os sistemas de coordenadas locais x_α têm por imagem espaços vetoriais $\mathcal{L}(E, F)$ (de dimensão rn) ao invés de tomarem valores no $\mathbb{R}^{rn}$. Porém, se for do nosso desejo, podemos passar em qualquer instante para matrizes $n \times r$.

A versão intrínseca se relaciona com a anterior do seguinte modo: cada subconjunto $\alpha = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n+r\}$ define um par $\alpha = (\mathbb{R}^r_\alpha, \mathbb{R}^n_{\alpha^*})$ de subespaços suplementares em $\mathbb{R}^{n+r}$, onde

$\mathbb{R}^r_\alpha$ é gerado por $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ e $\mathbb{R}^n_{\alpha^*}$ pelos restantes. A transformação linear $u = x_\alpha(H) = \pi_{\alpha^*} \circ (\pi_\alpha|H)^{-1} \colon \mathbb{R}^r_\alpha \to \mathbb{R}^n_{\alpha^*}$ tem por matriz associada às bases canônicas de $\mathbb{R}^r_\alpha$ e $\mathbb{R}^n_{\alpha^*}$ exatamente a matriz $x_\alpha(H)$ definida na versão original.

Sejam $\alpha = (E, F)$ e $\alpha' = (E', F')$. A mudança de coordenadas $x_{\alpha'} \circ x_\alpha^{-1} \colon \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E', F')$ faz corresponder a $u = x_\alpha(H) \in \mathcal{L}(E, F)$ a transformação linear $u' = x_{\alpha'}(H) \in \mathcal{L}(E', F')$ como se segue:
Seja $\tilde{u} \colon E \to E \oplus F$ definida por $\tilde{u}(x) = x + u(x)$. Então a imagem de $\tilde{u}$ é H. Como $\pi_{E'} \circ \tilde{u} \colon E \to E'$ é um isomorfismo. Por conseguinte, $u' = (x_{\alpha'} \circ x_\alpha^{-1})(u)$ é dada por $u' = \pi_{F'} \circ \tilde{u} \circ (\pi_{E'} \circ \tilde{u})^{-1}$. Isto mostra que $x_{\alpha'} \circ x^1_\alpha \in C^\infty$.

Capítulo V

Aplicações Diferenciáveis entre Variedades

Vimos no Capítulo I o que se entende por aplicação diferenciável entre espaços euclidianos. Este conceito se generaliza de modo natural, pois uma variedade se comporta localmente como se fosse um subconjunto aberto de um espaço euclidiano.

Sendo assim, pode-se desenvolver um cálculo diferencial em variedades: para definir a noção de derivada de uma aplicação $f\colon M \to N$ entre variedades, associaremos a cada $p \in M$ um espaço vetorial, chamado o espaço tangente a M no ponto p e indicado por TM_p. A derivada $f'(p)$ será uma transformação linear de TM_p para $TN_{f(p)}$.

Os teoremas da função inversa e das funções implícitas, as formas locais, os conceitos de imersão, mergulho e submersão se estendem ao contexto das variedades. O conteúdo geométrico dessas idéias será explorado nos Capítulos V, VI e VII.

1 Aplicações diferenciáveis

Sejam M^m, N^n variedades de classe C^r $(r \geq 1)$. Diz-se que uma aplicação $f\colon M \to N$ é *diferenciáel no ponto* $p \in M$ se existem sistemas de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1}\colon x(U) \to y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x(p)$.

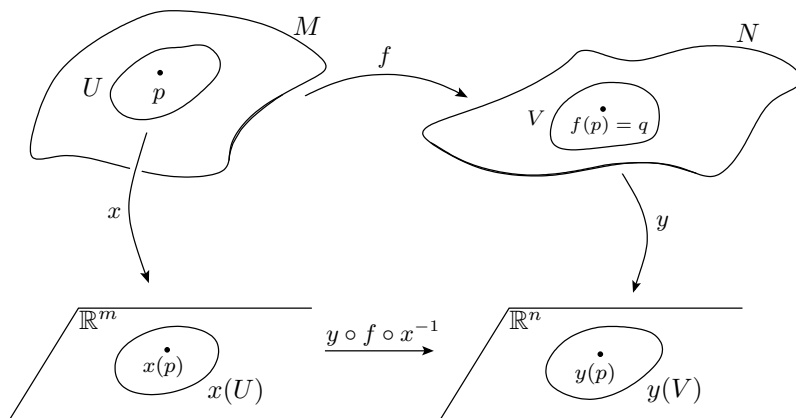



Figura 5.1.

A aplicação $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ é denominada a *expressão* de f nas coordenadas locais x, y.

Observe-se que, em particular, $f\colon M \to N$ é contínua no ponto $p \in M$.

Como as mudanças de coordenadas em M e N são difeomorfismos de classe C^r, a definição de diferenciabilidade independe dos sistemas de coordenadas x, y: para *todo* par de sistemas de coordenadas $x'\colon U' \to \mathbb{R}^m$ em M e $y'\colon V' \to \mathbb{R}^n$ em N, com $p \in U'$, $f(U') \subset V'$, a aplicação $f_{x',y'} = y' \circ f \circ (x')^{-1}$ será diferenciável no ponto $x'(p)$.

Dizemos que $f\colon M \to N$ é *diferenciável* se f for diferenciável em todos os pontos de M.

Dizemos finalmente que $f\colon M \to N$ é *de clase* C^k $(k \leq r)$ se, para cada $p \in M$, existem sistemas de coordenadas locais $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1}\colon x(U) \to y(V)$ é de classe C^k.

Segue-se da definição que uma aplicação $f\colon M \to N$ é de classe C^k quando existem um atlas $\mathfrak{A}$ sobre M e um atlas $\mathfrak{B}$ sobre N tais que para cada $y \in \mathfrak{B}$ existe $x \in \mathfrak{A}$ relativamente aos quais a expressão de f é de classe C^k.

Isto implica que, para toda carta $x'\colon U' \to \mathbb{R}^m$ do atlas máximo de M e para toda carta $y'\colon V' \to \mathbb{R}^n$ do atlas máximo de N com $f(U') \subset V'$, a expressão local $f_{x',y'}$ será de classe C^k. Com efeito, dado $p \in M$, sejam $x \in \mathfrak{A}$ e $y \in \mathfrak{B}$ tais que $f_{xy}\colon x(U) \to y(V)$ é de classe C^k. Então $f_{y'x'}\colon x'(U \cap U') \to y'(V \cap V')$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f_{y'x'} &= y' \circ f \circ (x')^{-1} = y' \circ y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1} \circ x \circ (x')^{-1} \\ &= (y' \circ y^{-1}) \circ f_{xy} \circ (x \circ (x')^{-1}) = \varphi_{yy'} \circ f_{xy} \circ \varphi_{xx'} \in C^k. \end{aligned}$$

Quando dissermos que $f\colon M \to N$ é de classe C^k admitiremos, ao menos implicitamente, que M e N são de classe C^r, $r \geq k$.

A composta de duas aplicações $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ de classe C^k é também uma aplicação de classe C^k.

Um *difeomorfismo* $f\colon M \to N$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável. Se ambas f e f^{-1} são de classe C^k, dizemos que f é um *difeomorfismo de classe* C^k.

Exemplos:

1) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Podemos considerar o conjunto U como uma variedade de classe C^k (Exemplo 1, Seção 4 do Cap. IV). Então f é diferenciável no sentido das variedades se, e somente se, f é diferenciável no sentido do Capítulo I. Mais geralmente, se $M^m \subset \mathbb{R}^n$ e $N^p \subset \mathbb{R}^q$ são

superfícies de classe C^k então uma aplicação $f\colon M^m \to N^p$ é de classe C^r $(r \leq k)$ no sentido de variedades se, e somente se, o é no sentido da Seção 3 do Capítulo II.

2) Sejam M^m uma variedade de classe C^k e $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ um sistema de coordenadas em M. Consideremos em U sua estrutura natural de subvariedade aberta de M (Exemplo 2, Seção 4 do Cap. IV). Então x é um difeomorfismo de classe C^k de U sobre $x(U)$. De fato, a expressão de ambas x e x^{-1} nos sistemas de coordenadas locais x e $\text{id}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é a aplicação identidade de $x(U)$.

Em particular, dada uma parametrização $\varphi\colon U_0 \to U \subset M$ em uma superfície de classe C^k, $M^m \subset \mathbb{R}^n$, vê-se que φ e φ^{-1} são difeomorfismos de classe C^k.

3) Os *caminhos diferenciáveis* são as aplicações diferenciáveis $\alpha\colon I \to M$, onde I é um intervalo aberto da reta real. A condição de diferenciabilidade de α exige que α seja contínua e que, dado um sistema de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, para todo subintervalo J tal que $\alpha(J) \subset U$, a composta $x \circ \alpha\colon J \to x(U)$ seja um caminho diferenciável em $\mathbb{R}^m$.

4) As *funções reais diferenciáveis* são as aplicações diferenciáveis $f\colon M \to \mathbb{R}$. Para todo sistema de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, a função composta $f \circ x^{-1}\colon x(U) \to \mathbb{R}$ deve ser uma função diferenciável de m variáveis reais, definida num aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.

5) Sejam M, N_1, N_2 variedades de classe C^r. Uma aplicação $f\colon M \to N_1 \times N_2$ é de classe C^k $(k \leq r)$ se, e somente se, $f = (f_1.f_2)$, onde as coordenadas $f_1\colon M \to N_1$ e $f_2\colon M \to N_2$ são de classe C^k. Realmente, considerando em $N_1 \times N_2$ os sistemas de coordenadas locais do tipo $y_1 \times y_2\colon V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ (ver Exemplo 4, Seção 4 do Cap. IV), vê-se que $(y_1 \times y_2) \circ f \circ x^{-1} = (y_1 \circ f_1 \circ x^{-1}, y_2 \circ f_2 \circ x^{-1})$. Lembremos, em seguida, que uma aplicação $g = (g_1, g_2)\colon x(U) \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ é de classe C^k se, e

somente se, ambas $g_1 : x(U) \to \mathbb{R}^{n_1}$ e $g_2 : x(U) \to \mathbb{R}^{n_2}$ são de classe C^k.

6) Sejam $\mathfrak{A}$ o atlas máximo de classe C^k sobre $\mathbb{R}$ que contém o sistema de coordenadas $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $\mathfrak{B}$ o atlas máximo de classe C^k sobre $\mathbb{R}$ que contém $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y(t) = t^{1/3}$. Então $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$ (ver Exemplo 1, Seção 4 do Cap. IV) e $M = (\mathbb{R}, \mathfrak{A})$ e $N = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ são duas estruturas distintas de variedade C^k no mesmo conjunto $\mathbb{R}$. A função $f : M \to M$ definida por $f(t) = t^{1/3}$ não é diferenciável. No entanto, a função $g : M \to N$, $g(t) = t^{1/3}$ é um difeomorfismo de classe C^k.

7) Consideremos a aplicação $f : G_r(\mathbb{R}^{n+r}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+r})$ que associa a cada subespaço de dimensão r, $H \subset \mathbb{R}^{n+r}$, seu complemento ortogonal $f(H) = H^{\perp}$.

Afirmação: f é um difeomorfismo de classe C^{∞}.

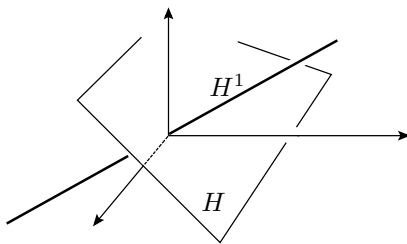



Figura 5.2.

Como $(H^{\perp})^{\perp} = H$, é suficiente provar que $f \in C^{\infty}$. Para cada $\alpha = \{i_1, \ldots, i_r\}$, vê-se que $f(U_\alpha) = U_{\alpha^*}$. Calculemos a expressão de f nos sistemas de coordenadas $x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{rn}$, $y_{\alpha^*} : U_{\alpha^*} \to \mathbb{R}^{rn}$. Seja $H \in U_\alpha$, arbitrário. Então $x_\alpha(H) = \alpha^*(Y_0)$ onde Y_0 é a matriz $(n+r) \times r$ de coordenadas homogêneas de H tal que $\alpha(Y_0) = I_r$. Analogamente, $y_{\alpha^*}(H^{\perp}) = \alpha(Z_0)$, onde Z_0 é a matriz $(n+r) \times n$, que representa $H^{\perp}$, tal que $\alpha^*(Z_0) = I_n$. As colunas

de Z_0, sendo vetores de $H^\perp$, são ortogonais às colunas de Y_0, base de H. Isto significa que ${}^tY_0 \cdot Z_0 = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha = \{1, \ldots, r\}$, logo Y_0 e Z_0 podem ser escritas $Y_0 = \binom{I_r}{A}$, $Z_0 = \binom{B}{I_n}$, onde $A = x_\alpha(H)$ é $n \times r$ e $B = y_{\alpha^*}(H^\perp)$ é $r \times n$. Então ${}^tY_0 \cdot Z_0 = I_r \cdot B = {}^tA \cdot I_n = B + {}^tA = 0$. Logo $B = -{}^tA$. Conclusão: $y_{\alpha^*} \circ f \circ (x + \alpha)^{-1} \colon A \mapsto -{}^tA$, portanto $f \in C^\infty$.

2 O espaço tangente

Recordemos que o espaço tangente TM_p a uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, num ponto $p \in M$, é o conjunto de todos os vetores $v \in \mathbb{R}^n$ que são vetores-velocidade, em p, de caminhos diferenciáveis contidos em M.

Porém, se M é uma variedade diferenciável, os "vetores tangentes $v \in TM_p$" deverão ser obtidos abstratamente, pois M não está contida em nenhum espaço euclidiano. Apresentamos agora uma das maneiras de se construir o espaço tangente.

Seja M^m uma variedade de classe C^k e seja p um ponto de M. Indicamos por $\mathcal{C}_p$ o conjunto de todos os caminhos $\lambda \colon J \to M$, definidos num intervalo aberto J, contendo 0, tais que $\lambda(0) = p$ e λ é diferenciável em 0. (Ver Exemplo 3 da Seção 1.) Se $\lambda \in \mathcal{C}_p$ e $x \colon U \to \mathbb{R}^m$ é um sistema de coordenadas em M, com $p \in U$, pode acontecer que a imagem $\lambda(J)$ não esteja inteiramente contida em U. Em vista disso, toda vez que escrevemos $x \circ \lambda$, estamos admitindo que o domínio de λ foi suficientemente reduzido a um intervalo aberto menor J', contendo 0, tal que $\lambda(J') \subset U$.

Diremos que dois caminhos $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$ são *equivalentes*, e escreveremos $\lambda \sim \mu$, quando existir um sistema de coordenadas locais $x \colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in U$, tal que $x \circ \lambda \colon J \to \mathbb{R}^m$ e $x \circ \mu \colon I \to \mathbb{R}^m$ têm o mesmo vetor-velocidade em $t = 0$, isto é, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$.

Vale a pena observar que, neste caso, a igualdade $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ será verdadeira para *todo* sistema de coordenadas $x \colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, $p \in U$. Resulta daí que a relação $\lambda \sim \mu$ é de fato uma relação de equivalência em $\mathcal{C}_p$.

O *vetor-velocidade* $\dot{\lambda}$ de um caminho $\lambda \in \mathcal{C}_p$ é, por definição, a classe de equivalência de λ. Ou seja, $\dot{\lambda} = \{\mu \in \mathcal{C}_p; \mu \sim \lambda\}$. Portanto, dados $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$, tem-se $\dot{\lambda} = \dot{\mu}$ se, e somente se, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ para algum (logo para todo) sistema de coordenadas locais $x \colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in U$.

O conjunto quociente $\mathcal{C}_p/\sim$ será indicado por TM_p e será chamado o *espaço tangente* à variedade M no ponto p. Veremos que TM_p possui todas as propriedades "desejáveis" para um espaço tangente.

Por exemplo, pode-se dar a TM_p uma estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, da seguinte maneira:

Cada sistema de coordenadas locais $x \colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in U$, dá origem a uma bijeção $\bar{x} = \bar{x}(p) \colon TM_p \to \mathbb{R}^m$, definida por $\bar{x}(\dot{\lambda}) = (x \circ \lambda)'(0)$. É evidente que $\bar{x}$ está bem definida e é injetora. Mostremos que $\bar{x}$ e sobrejetora. Dado $v \in \mathbb{R}^m$, seja $\lambda \in \mathcal{C}_p$ dado por $\lambda(t) = x^{-1}[x(p) + tv]$. Então $\bar{x}(\lambda) = (x \circ \lambda)'(0) = v$.

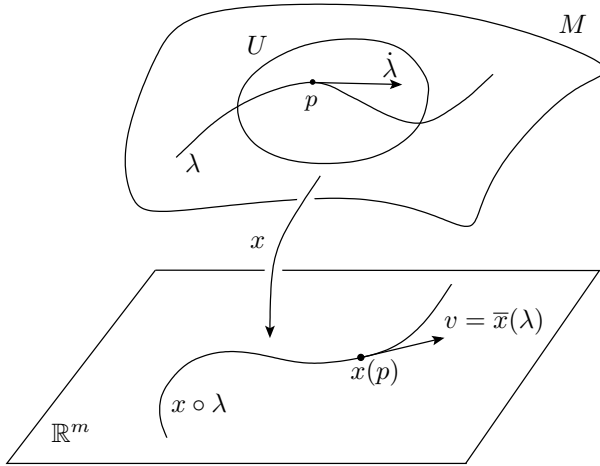



Figura 5.3.

Damos a TM_p uma estrutura de espaço vetorial real, exigindo que a bijeção $\bar{x}\colon TM_p \to \mathbb{R}^m$ venha a ser um isomorfismo. Em outras palavras, as operações de soma e produto de um vetor por um número real são definidas pelas equações

$$\dot{\lambda} + \dot{\mu} = (\bar{x})^{-1}(\bar{x}(\dot{\lambda}) + \bar{x}(\dot{\mu})),$$
$$c \cdot \dot{\lambda} = (\bar{x})^{-1}(c \cdot \bar{x}(\dot{\lambda})).$$

O fato crucial é que estas operações não dependem da escolha do sistema de coordenadas x. Com efeito, dado $y\colon V \to \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in V$, então $\bar{y} = (y \circ \bar{x}^{-1})' \circ \bar{x}\colon TM_p \to \mathbb{R}^m$.

Como $(y \circ x^{-1})'(x(p))$ é um isomorfismo, os sistemas de coordenadas x e y originam a mesma estrutura de espaço vetorial em TM_p.

Dados um sistema de coordenadas locais $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M e um ponto $p \in U$, indicamos por $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(p)\right\}$ a base de TM_p que é levada pelo isomorfismo $\bar{x}\colon TM_p \to \mathbb{R}^m$ sobre a base canônica $\{e_1, \dots, e_m\}$. Às vezes escreveremos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ em vez de $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. O vetor básico $\frac{\partial}{\partial x^i} \in TM_p$ é a classe de equivalência de qualquer caminho $\lambda \in \mathcal{C}_p$ tal que $(x \circ \lambda)'(0) = e_i$.

3 A derivada em uma aplicação diferenciável

Sejam M^m, N^n variedades diferenciáveis e $f\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in M$.

A *derivada* de f no ponto p é a transformação linear $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$ que associa a cada $v = \dot{\lambda} \in TM_p$ o elemento $f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)^{\cdot} \in TN_{f(p)}$, vetor-velocidade do caminho $f \circ \lambda \in \mathcal{C}_{f(p)}$.

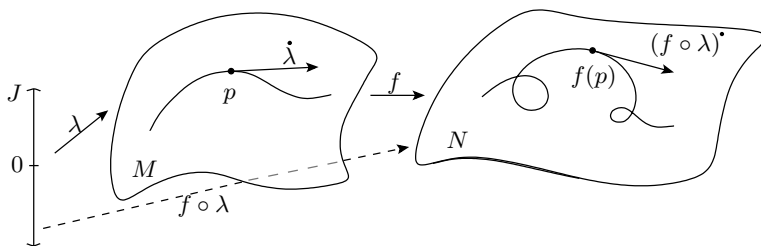



Figura 5.4.

Devemos verificar que $f'(p)$ é uma transformação linear bem definida. Tomemos assim sistemas de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in U$ e $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ em N, com $f(p) \in V$ e $f(U) \subset V$.

Dado $v = \dot{\lambda} \in TM_p$, então $(y \circ f \circ \lambda)'(0) = (y \circ f \circ x^{-1} \circ x \circ \lambda)'(0) = f'_{xy} \circ (x \circ \lambda)'(0)$.

Isto mostra que: 1) O vetor velocidade do caminho $f \circ \lambda \in \mathcal{C}_{f(p)}$ depende apenas do vetor velocidade de λ. Por conseguinte, $f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)^{\cdot}$ está bem definido. 2) O diagrama

é comutativo. Logo $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$ é uma transformação linear, cuja matriz em relação às bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ de TM_p e $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ de $TN_{f(p)}$ é a matriz jacobiana $(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$ da aplicação $f_{xy}\colon x(U) \to \mathbb{R}^n$ no ponto $x(p)$.

Proposição 1. (Regra da cadeia.) *Sejam M, N, P variedades diferenciáveis, $f\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in M$ e $g\colon N \to P$ uma aplicação diferenciável no ponto $f(p) \in N$. Então $g \circ f\colon M \to P$ é diferenciável no ponto $p \in M$ e $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ f'(p)\colon TM_p \to TP_{gf(p)}$.*

Demonstração: Consideremos os sistemas de coordenadas $x\colon U \to x(U)$ em M, $y\colon V \to y(V)$ em N e $z\colon W \to z(W)$ em P, tais que $p \in U$, $f(U) \subset V$ e $g(V) \subset W$.

Ora, $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}\colon x(U) \subset \mathbb{R}^m \to y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x(p)$ e $g_{yz} = z \circ g \circ y^{-1}\colon y(V) \subset \mathbb{R}^n \to z(W) \subset \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $y(f(p))$. Pela regra de cadeia usual (Capítulo I, Seção 4) resulta que $g_{yz} \circ f_{xy} = z \circ (g \circ f) \circ x^{-1}\colon x(U) \to z(W)$ é

diferenciável no ponto $x(p)$. Logo $g \circ f\colon M \to P$ é diferenciável no ponto $p \in M$. Dado $v = \dot{\lambda} \in TM_p$, então

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(p) \cdot \dot{\lambda} &= (g \circ f \circ \lambda)^{\cdot} = (g \circ (f \circ \lambda))^{\cdot} \\ &= g'(f(p)) \cdot (f \circ \lambda)^{\cdot} = g'(f(p)) \cdot f'(p) \cdot \dot{\lambda}.\end{aligned}$$

Observações:

1) Se $f = \mathrm{id}\colon M \to M$ então $f'(p) = \mathrm{id}\colon TM_p \to TM_p$ para todo $p \in M$.
2) Se $f\colon M \to N$ é um difeomorfismo então, para todo $p \in M$, $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$ é um isomorfismo, cujo inverso é $(f^{-1})'(f(p)) = [f'(p)]^{-1}$.

4 Algumas identificações naturais

1) *$T(\mathbb{R}^m)_p = \mathbb{R}^m$ para todo $p \in \mathbb{R}^m$.*

Consideremos o sistema de coordenadas $x = \mathrm{id}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. O isomorfismo $\mathrm{id}\colon T(\mathbb{R}^m)_p \to \mathbb{R}^m$, $\dot{\lambda} \mapsto \dfrac{d\lambda}{dt}(0) \in \mathbb{R}^m$, fornece a identificação desejada. Estamos identificando, em cada $p \in \mathbb{R}^m$, a coleção $\dot{\lambda} = \{\mu \in \mathcal{C}_p; \mu \sim \lambda\}$ com o vetor $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mu'(0) = v$ para todo $\mu \in \dot{\lambda}$.

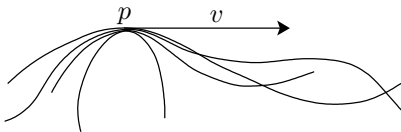



Figura 5.5.

2) **O espaço tangente a uma superfície**

Temos duas definições para o espaço tangente a uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^k: O espaço tangente "concreto", que foi

definido no Capítulo II e o espaço tangente "abstrato", construído na Seção 2 deste capitulo.

Identificaremos cada vetor tangente "abstrato" $\dot{\lambda}$ com o vetor "concreto" $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = \mu'(0)$ para todo $\mu \in \dot{\lambda}$.

Isto é equivalente a considerar a aplicação de inclusão $i\colon M \to \mathbb{R}^n$ (que é de classe C^k) e identificar TM_p com sua imagem pela derivada $i'(p)\colon TM_p \to T(\mathbb{R}^n)_p \equiv \mathbb{R}^n$.

3) **Espaço tangente a um subconjunto aberto**

Seja U um subconjunto aberto de uma variedade M^m de classe C^k. U pode ser visto como uma variedade de dimensão m e classe C^k (ver Exemplo 2, Seção 4 do Cap. IV).

Na definição de TM_p, $p \in U$, não há perda de generalidade em se considerar somente os caminhos $\lambda\colon J \to M$, $\lambda \in \mathcal{C}_p$, tais que $\lambda(J) \subset U$. Isto significa que $TU_p = TM_p$.

Formalmente, estamos considerando a aplicação de inclusão $i\colon U \to M$ e identificando TU_p com TM_p por meio do isomorfismo $i'(p)\colon TU_p \to TM_p$.

Estas três identificações acarretam algumas outras:

4) **A derivada no sentido das variedades é generalização natural da derivada em** $\mathbb{R}^n$. (Ver Exemplo 1, Seção 1.)

Dada uma aplicação diferenciável $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ aberto), a presente noção de derivada $f'(p)\colon TU_p \to T(\mathbb{R}^n)_{f(p)}$ se reduz à "antiga", através das identificações $TU_p = \mathbb{R}^m$, $T(\mathbb{R}^n)_{f(p)} = \mathbb{R}^n$.

5) Sejam M^m uma variedade diferenciável e $x\colon U \to x(U) \subset \mathbb{R}^m$ um sistema de coordenadas locais em M. Então x é um difeomorfismo de U sobre $x(U)$.

Para cada $p \in U$, a derivada $x'(p)\colon TU_p \to T(\mathbb{R}^m)_{x(p)}$ coincide com o isomorfismo $\bar{x}\colon TM_p \to \mathbb{R}^m$ (ver Seção 2).
De agora em diante será abandonada a notação temporária $\bar{x}$.

6) Sejam M uma variedade diferenciável e $\lambda\colon J \to M$, $\lambda \in \mathcal{C}_p$, um caminho em M ($\lambda(0) = p$). A derivada $\lambda'(0)\colon \mathbb{R} \to TM_p$ é dada por $\lambda'(0) \cdot r = (\lambda \circ \alpha_r)^{\cdot}$, onde $\alpha_r(t) = rt$. Identificaremos a aplicação linear $\lambda'(0)$ com o vetor velocidade $\lambda'(0) \cdot 1 = \dot{\lambda} \in TM_p$, abandonando, de agora em diante, a notação $\dot{\lambda}$. Mais geralmente,, seja $\lambda\colon (a, b) \to M$ um qualquer caminho diferenciável. Para cada $c \in (a, b)$ escrevemos $\lambda'(c)$ em vez de $\lambda'(c) \cdot 1$ e dizemos que $\lambda'(c) \in TM_{\lambda(c)}$ é o *vetor-velocidade* do caminho $\lambda(t)$ em $t = c$.

5 A aplicação esférica de Gauss

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ uma hiperfície orientável de classe C^k, $k \geq 2$. Vimos no Capítulo III (Proposição 5) que existe um campo $u\colon M \to \mathbb{R}^{m+1}$, de classe C^{k-1}, de vetores unitários, normais a M.

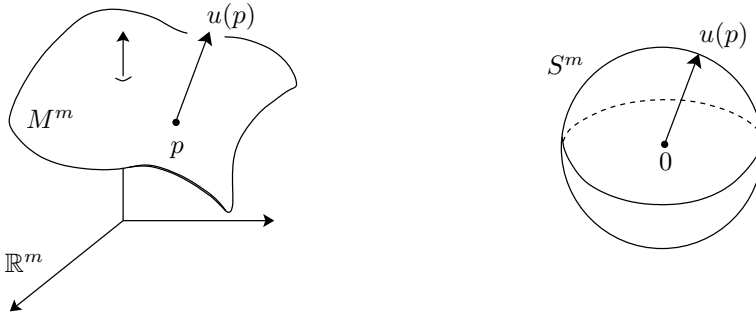



Figura 5.6.

Como $u(p) \in S^m$ para todo $p \in M$, vemos que $u\colon M \to S^m$ é de classe C^{k-1} (cfr. Seção 3 do Cap. II).

Em cada ponto $p \in M$, os espaços tangentes TM_p e $T(S^m)_{u(p)}$, considerados como subespaços do $\mathbb{R}^{m+1}$, são iguais, já que ambos são o complemento ortogonal de $u(p)$. Por conseguinte, a derivada de u é um *endomorfismo* $u'(p)\colon TM_p \to TM_p$.

O número real $K(p) = \det(u'(p))$ chama-se a *curvatura gaussiana* de M no ponto p. Em cada componente conexa de M há duas escolhas, u e $-u$, para um campo contínuo de vetores unitários normais a M. Quando a dimensão de M é par, $\det(u'(p)) = \det(-u'(p))$, e a curvatura gaussiana $K(p)$ não dependerá da escolha de u. Se m é ímpar, $K(p)$ está definido a menos de sinal.

Uma propriedade importante da derivada $u'(p)\colon TM_p \to TM_p$ é que ela é auto-adjunta, isto é, $\langle u'(p)\cdot v, w\rangle = \langle v, u'(p)\cdot w\rangle$ para todos $v, w \in TM_p$. Para provar isto, seja $\varphi\colon U_0 \to U$ uma parametrização de uma vizinhança U de $p \in M$. Sejam $\varphi(x_0) = p$, $\varphi'(x_0)\cdot v_0 = v$, $\varphi'(x_0)\cdot w_0 = w$. Para cada $x \in U_0$, tem-se $\langle u(\varphi(x)), \varphi'(x)\cdot w_0\rangle = 0$. Por diferenciação, segue-se que

$$\langle u'(p)\cdot\varphi'(x_0)\cdot v_0, \varphi'(x)\cdot w_0\rangle + \langle u(p), \varphi''(x_0)\cdot(v_0, w_0)\rangle = 0.$$

Portanto $\langle u'(p)\cdot v, w\rangle = -\langle u(p)\varphi''(x_0)\cdot(v_0,w_0)\rangle$. Como $\varphi''(x_0)$ é, pelo teorema de Schwarz, uma forma bilinear simétrica, segue-se que $\langle u'(p)\cdot v, w\rangle = \langle u'(p)\cdot w, v\rangle$.

Os valores próprios da transformação linear $u'(p)$ são, portanto, números reais $k_1 \geq \cdots \geq k_m$. Estes números são denominados de *curvaturas principais* de hiperfície M no ponto p. É claro que $K(p) = k_1 \cdot \cdots \cdot k_m$.

Grande parte da Geometria Diferencial Clássica é estudada usando a aplicação de Gauss. Muitas propriedades topológicas globais de M se refletem no comportamento de K.

6 Estruturas de variedade em um espaço topológico

Dada uma variedade diferenciável $(M, \mathfrak{A})$, é fácil definir outra estrutura de variedade diferenciável $(M, \mathfrak{B})$, de mesma classe que a anterior, sobre o mesmo espaço topológico M. Basta considerar um homeomorfismo $\varphi\colon M \to M$ que não seja um difeomorfismo, e definir

$$\mathfrak{B} = \{x \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n;\ x\colon U \to \mathbb{R}^n \text{ em } \mathfrak{A}\}.$$

É claro que $\mathfrak{B}$ herda de $\mathfrak{A}$ a propriedade de ser um atlas diferenciável máximo. Entretanto, do fato de φ não ser um difeomorfismo, deduz-se imediatamente que $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$. Isto se exprime dizendo que os atlas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ definem em M estruturas distintas de variedade diferenciável. Por outro lado a aplicação

$$\varphi\colon (M, \mathfrak{B}) \to (M, \mathfrak{A})$$

é um difeomorfismo (verificação trivial), o que se exprime dizendo que as duas estruturas de variedade que estamos considerando em

M são distintas, porém *equivalentes*. Estas considerações sugerem algumas perguntas:

1) Dada uma variedade diferenciável $(M, \mathfrak{A})$ será possível definir em M uma nova estrutura não equivalente à primeira? Ou seja, existirá outro atlas diferenciável máximo $\mathfrak{B}$, sobre M, tal que $(M, \mathfrak{A})$ não é difeomorfa a $(M, \mathfrak{B})$?
(Problema da *unicidade* da estrutura diferenciável.)

2) Dada uma variedade topológica M, isto é, um espaço topológico, munido de um atlas máximo $\mathfrak{A}_0$, de classe C^0, existirá um atlas diferenciável $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_0$? Em outras palavras, admitirá toda variedade topológica uma estrutura de variedade diferenciável?
(Problema da *existência* de uma estrutura diferenciável.)

3) Uma variedade M, de classe C^k, admitirá uma estrutura de variedade de classe C^s com $s > k$?

O problema 1) foi resolvido por J. Milnor (Annals of Mathematics, vol. 64 (1956), págs. 395-405). Já se sabia que, em dimensões baixas, (1,2,3) duas estruturas diferenciáveis quaisquer numa variedade eram equivalentes. Esperava-se que a unicidade (a menos de um difeomorfismo) fosse válida em todos os casos. Surpreendentemente, Milnor obteve exemplos de várais estruturas diferenciáveis não equivalentes na esfera S^7.

O problema 2) foi resolvido por S. Smale e, independentemente, por M. Kervaire. Existem variedades topológicas que não admitem estrutura de variedade diferenciável. Aqui, novamente, surge uma pergunta natural: como deve ser a topologia de uma variedade de classe C^0 para que ela admita uma estrutura diferenciável?

O problema 3) foi resolvido por H. Whitney (Annals of Mathematics, vol. 37 (1936) págs. 645-680). Todo atlas máximo $\mathfrak{A}_1$, de classe C^1, sobre uma variedade M, contém um atlas $\mathfrak{A}$ de

classe C^∞. (Isto será demonstrado mais adiante, no Capítulo XI.) Mais do que isso: Whitney demonstrou que $\mathfrak{A}$ pode ser tomado analítico. Em termos menos precisos: toda variedade de classe C^1 admite uma estrutura de classe C^∞ e, até mesmo, uma estrutura analítica.

Uma discussão mais completa dos problemas e resultados acima mencionados foge ao nível deste livro. Um problema antigo e de maior dificuldade é o da *classificação* das variedades diferenciáveis de uma dada dimensão n (duas variedades M^n, N^n pertencem à mesma "classe de difeomorfismo" se, e somente se, são difeomorfas). Este problema está resolvido em dimensões 1 e 2. Uma variedade diferenciável M^1 é difeomorfa ao círculo

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\},$$

se for compacta, ou à reta $\mathbb{R}$, se não for compacta. A classificação das variedades M^2 não é tão simples mas está completamente feita. Duas variedades de dimensão 2 são difeomorfas se e só se são homeomorfas. Para a classificação (por homeomorfismos) das M^2 compactas, veja-se Seifert-Threlfall, "Lecciones de Topologia", Capítulo VI. Uma M^2 compacta orientável e caracterizada pelo seu *gênero* (número de "asas" acrescentadas a uma esfera para obter M^2). Elas são: a esfera (gênero 0), o toro (gênero 1), etc. Uma M^2 compacta não orientável é caracterizada pelo seu "recobrimento orientável", dado por uma variedade compacta orientável $\widetilde{M}^2$ e uma aplicação regular

$$\pi\colon \widetilde{M}^2 \to M^2$$

tal que $\pi^{-1}(q)$ tem 2 pontos, para cada $q \in M^2$. Por exemplo, o plano projetivo é recoberto pela esfera, a "garrafa de Klein" pelo toro, etc. Para a classificação das M^2 não compactas, veja-se Kererkjartó: "Vorlesungen uber Topologie", Berlin, 1932. Em

dimensão 3, sabe-se que toda variedade topológica M^3 possui uma estrutura diferenciável, e que duas variedades diferenciável M^3 e N^3 são difeomorfas se e somente se são homeomorfas. Mas o problema de classificar as variedades M^3 por homeomorfismos tem resistido às tentativas dos topólogos. Em particular, não se sabe se uma variedade compacta, simplesmente conexa, de dimensão 3, é ou não homeomorfa à esfera S^3 (conjectura de Poincaré). S. Smale demonstrou que uma variedade simplesmente conexa M^n, que tem os mesmos grupos de homologia de uma esfera S^n, é homeomorfa a S^n, se $n \neq 3, 4$. Os casos $n = 3, 4$ continuam em aberto.

Capítulo VI

Imersões, Mergulhos e Subvariedades

O objetivo principal deste capítulo é introduzir o conceito de subvariedade.

Intuitivamente, uma subvariedade $M^m \subset N^n$ está situada em N de modo análogo a uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, situada em $\mathbb{R}^n$.

É feita, também, uma discussão elementar das relações que existem entre as noções de imersão e de mergulho.

A curva de Kronecker no toro é discutida em detalhe. Trata-se de um exemplo importante, inclusive do ponto-de-vista histórico, de uma imersão injetiva $\mathbb{R} \to T^2$ cuja imagem é densa.

1 Imersões

Sejam M^m, N^n variedades de classe C^k $(k \geq 1)$ e $f\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável.

Um ponto $p \in M$ diz-se um *ponto regular* de f quando a derivada $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$ é injetiva. Caso contrário, p diz-se um ponto *singular* ou crítico de f.

Tomando coordenadas locais $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M e $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ em N, com $f(U) \subset V$, a derivada $f'(p)$, $p \in U$, transforma-se na derivada $f'_{xy}(x(p))\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, onde $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$. Em outras palavras, o diagrama abaixo é comutativo.

Um ponto $p \in U \subset M$ é regular para f se, e somente se, $f'_{xy}(x(p))$ é injetiva.

O conjunto dos pontos regulares $p \in M$ de uma aplicação de classe C^k, $f\colon M \to N$, $(k \geq 1)$ pode ser vazio. Por exemplo, isto ocorre sempre que $\dim M > \dim N$.

Proposição 1. (Forma local das imersões em variedades.) *Seja $p \in M$ um ponto regular para a aplicação $f\colon M \to N$ de classe C^k, $k \geq 1$. Então existe um sistema de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in U$, e um difeomorfismo de classe C^k, $y\colon V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, ($V \subset N$ aberto) tais que $f(U) \subset V$ e $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}\colon x(U) \to x(U) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ é a aplicação de inclusão, isto é, $f_{xy}(w) = (w, 0)$. Em particular, o conjunto dos pontos regulares $p \in M$ de f é aberto em M.*

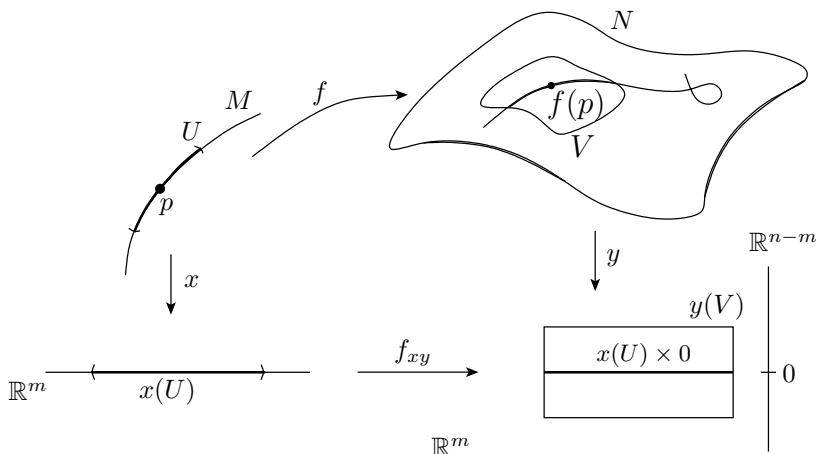



Figura 6.1.

Demonstração: Dados quaisquer sistemas de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M e $z\colon V \to \mathbb{R}^n$ em N, com $f(U) \subset V$, consideremos os diagramas

Observemos que $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto, $f_{xz}\colon x(U) \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^k e $f'_{xz}(x(p))$ é injetiva. Logo, pela forma local das imersões (Capítulo 1, seção 9), restringindo se necessário os domínios, conclui-se que existe um difeomorfismo de classe C^k, $\xi\colon z(V) \to x(U) \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ($0 \in W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ aberto), tal que $(\xi \circ f_{xz})(u) = (u, 0)$.

Concluimos a demonstração tomando $y = \xi \circ z$.

Observação: O difeomorfismo de classe C^k, $y\colon V \to y(V) \subset \mathbb{R}^n$, será um sistema de coordenadas em N se a classe de N for exatamente igual a k.

Uma aplicação diferenciável $f\colon M \to N$ diz-se uma *imersão* se todo ponto $p \in M$ é um ponto regular para f, isto é, a derivada $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$ é injetiva para cada $p \in M$.

Proposição 2. *Seja $f\colon M^m \to N^n$ uma imersão de classe C^k. Uma aplicação $g\colon P^r \to M^m$ é de classe C^k se, e somente se, g é contínua e $f \circ g\colon P^r \to N^n$ é de classe C^k $(k \geq 1)$.*

Demonstração: Suponhamos que g seja contínua e que $f \circ g \in C^k$. Pela Proposição 1, para cada $p \in P$ existem um sistema de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, com $g(p) \in U$, e um difeomorfismo de classe C^k, $y\colon V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, ($V \subset N$ aberto) tais que $f(U) \subset V$ e $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}\colon x(U) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ é da forma $f_{xy}(w) = (w, 0)$. Como g é *contínua*, podemos encontrar um sistema de coordenadas $z\colon Z \to \mathbb{R}^r$ em P, com $p \in Z$, tal que $g(Z) \subset U$. Portanto $(f \circ g)_{zy} = y \circ f \circ g \circ z^{-1}\colon z(Z) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$

faz sentido e é da forma $(f \circ g)_{zy} = (g_{zx}, 0)$. Como $f \circ g \in C^k$, segue-se que $(f \circ g)_{zy} \in C^k$, logo $g_{zx} \in C^k$. Conclusão: $g \in C^k$.

A recíproca é óbvia.

Exercício. Encontrar uma imersão $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, de classe C^∞, e uma aplicação descontínua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ seja de classe C^∞.

Corolário. *Sejam N uma variedade de classe C^k, pelo menos, M um espaço topológico e $f\colon M \to N$ uma aplicação contínua. Então existe no máximo uma estrutura de variedade C^k em M que torna f uma imersão de classe C^k.*

Demonstração: Suponhamos que existam dois atlas máximos de classe C^k em M, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, tais que $f\colon (M, \mathfrak{A}) \to N$ e $f\colon (M, \mathfrak{B}) \to N$ são imersões de classe C^k. A aplicação identidade $g\colon (M, \mathfrak{A}) \to (M, \mathfrak{B})$ é contínua e $f \circ g = f\colon (M, \mathfrak{A}) \to N$. Pela Proposição 2, resulta que $g \in C^k$. Isto significa que para cada $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em $\mathfrak{A}$ e $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ em $\mathfrak{B}$, com $U \cap V \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas $y \circ x^{-1}$ é de classe C^k. Analogamente, a aplicação identidade $(M, \mathfrak{B}) \to (M, \mathfrak{A})$ é de classe C^k, logo todas as mudanças de coordenadas $x \circ y^{-1}$, $x \in \mathfrak{A}$ e $y \in \mathfrak{B}$, também são de classe C^k. Como $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são atlas máximos de classe C^k, conclui-se que $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

2 Mergulhos e subvariedades

Sejam M^m, N^n variedades de classe C^k $(k \geq 1)$.

Diz-se que uma aplicação $f\colon M \to N$ é um *mergulho* se

(i) f é uma imersão.

(ii) f é um homeomorfismo de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.

Na Seção 6 veremos exemplos de imersões injetivas que não são homeomofismos sobre sua imagem.

Observação: Quando $f\colon M \to N$ é um mergulho de classe C^k, a Proposição 2 fica simplificada, pois não será preciso supor que g é contínua. De fato, se $f \circ g \in C^k$, então $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ é contínua.

Uma *subvariedade* M^m de classe C^k de uma variedade N^n de classe C^r $(r \geq k)$ é um subconjunto $M \subset N$, com a topologia induzida pela de N, e dotado de uma estrutura de variedade C^k tal que a aplicação de inclusão $i\colon M \to N$ é um mergulho de classe C^k.

Segue-se do corolário anterior que existe no *máximo* uma estrutura de variedade C^k que faz de M uma subvariedade C^k de N.

Devido à importância do conceito, explicitamos as condições que devem ser verificadas a fim de que M seja uma subvariedade de classe C^k de N.

(i) M é uma variedade de classe C^k.

(ii) $M \subset N$ e a topologia de M é induzida pela de N.

(iii) Para cada $p \in M$, existem sistemas de coordenadas $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ em N e $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M tais que $p \in U \subset V$ e $y \circ x^{-1}\colon x(U) \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão de classe C^k. (Então $y \circ x^{-1}$ é necessariamente um mergulho, pois a topologia de U é induzida pela de V.)

Intuitivamente, M está situada em N assim como uma superfície de classe C^k em $\mathbb{R}^n$.

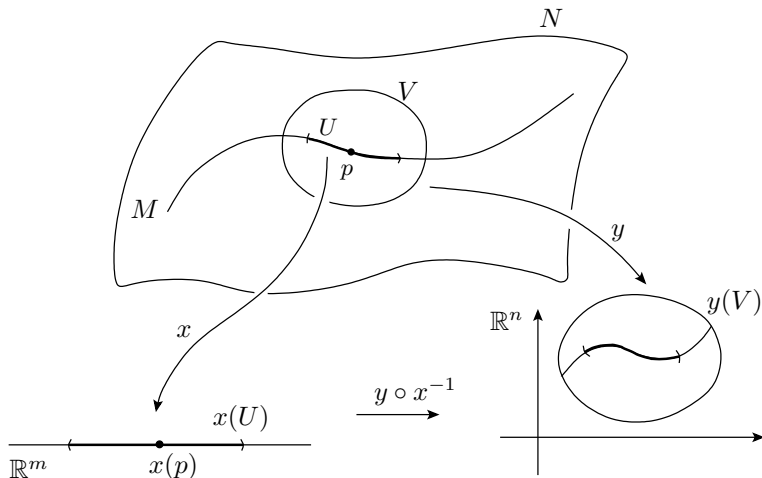



Figura 6.2.

Exemplos

1) As subvariedades de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ são precisamente as superfícies $M \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^k.

2) Sejam M e N variedades de classe C^k e $f\colon M \to N$ um mergulho de classe C^k. Então $f(M)$ é uma subvariedade de classe C^k de N.

3) Um subconjunto aberto $U \subset N$, considerado como variedade (ver Exemplo 2, Seção 4 do Cap. IV) é uma subvariedade de N, da mesma classe e dimensão. Reciprocamente, toda variedade n-dimensional $M^n \subset N^n$ é um subconjunto aberto de N. Realmente, para cada par x, y como em (iii), $y \circ x^{-1}\colon x(U) \to \mathbb{R}^n$ é,

pelo teorema da função inversa, uma aplicação aberta. Segue-se que $M = \bigcup [y^{-1} \circ (y \circ x^{-1})(x(U))]$ é um subconjunto aberto de N.

Em particular, se uma variedade conexa N^n contém uma subvariedade compacta M^n, de mesma dimensão, então $M = N$.

3 Subvariedades

Na prática, as três condições que devemos verificar para que M seja uma subvariedade de classe C^k de N podem ser simplificadas pelas seguintes proposições.

Proposição 3. *Sejam N uma variedade C^r e M um subconjunto de N. Suponhamos que para cada $p \in M$ exista um sistema de coordenadas $y \colon V \to \mathbb{R}^n$ em N, com $p \in V$, e uma aplicação injetiva $x \colon M \cap V \to \mathbb{R}^m$ tais que $x(M \cap V)$ é aberto e $y \circ x^{-1} \colon x(M \cap V) \to \mathbb{R}^n$ é um mergulho de classe C^k. Então existe uma (única) estrutura de variedade C^k em M que o torna uma subvariedade de classe C^k de N.*

Demonstração: Dotando M da topologia induzida pela de N, cada aplicação $x = (y \circ x^{-1})^{-1} \circ y \colon M \cap V \to x(M \cap V)$ será um homeomorfismo. A coleção $\mathfrak{A}$ de todas estas aplicações $x \colon M \cap V \to x(M \cap V)$ é um atlas de classe C^k em M. Realmente, se $x \colon M \cap V \to \mathbb{R}^m$ relaciona-se com $y \colon V \to \mathbb{R}^n$ da maneira indicada no enunciado e $x_1 \colon M \cap V_1 \to \mathbb{R}^m$ relaciona-se com $y_1 \colon V_1 \to \mathbb{R}^n$, e se $M \cap V \cap V_1 \neq \emptyset$, então $x_1 \circ x^{-1} = (y_1 \circ x_1^{-1}) \circ (y_1 \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1}) \in C^k$.

A unicidade da estrutura de variedade em M é um fato geral, visto na Seção 2.

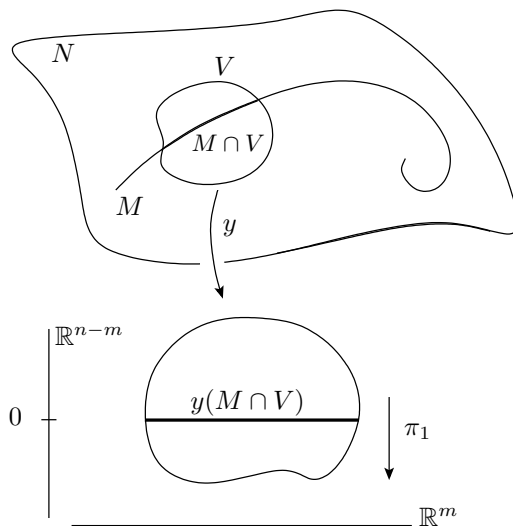



Figura 6.3.

Proposição 4. *Seja N^n uma variedade de classe C^r. Para que um subonjunto $M \subset N$ sejam uma subvariedade de dimensão m e classe C^k $(k \leq r)$ de N é necessário e suficiente que, para cada $p \in M$, exista um aberto $V \subset N$, $p \in V$, e um difeomorfismo de classe C^k $\; y \colon V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $y(M \cap V) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$.*

($\Rightarrow$) A condição é necessária. Resulta imediatamente da forma local das imersões (Proposição 1) e da definição de subvariedade.

($\Leftarrow$) A condição é suficiente. Resulta imediatamente da Proposição 3, tomando

$$x = (\pi_1 \circ y) \mid (M \cap V) \colon M \cap V \to \mathbb{R}^m.$$

Corolário. *Seja N uma variedade de classe C^r. Dado $M \subset N$, se cada $p \in M$ possui uma vizinhança V em N tal que $M \cap V$ é uma subvariedade de dimensão m e classe C^k de N $(k \leq r)$ então M é uma subvariedade de dimensão m e classe C^k de N.*

Observação: **Espaço tangente a uma subvariedade**.

Seja $M^m \subset N^n$ uma subvariedade de classe C^k. Em cada ponto $p \in M$ identificamos o espaço tangente TM_p com um subespaço de TN_p, por meio da aplicação linear injetiva $i'(p)\colon TM_p \to TN_p$, onde $i\colon M \to N$ é a inclusão.

Como casos especiais deste procedimento, tem-se as identificações $TU_p = TN_p$ para um subconjunto aberto e $TM_p \subset \mathbb{R}^n$ quando $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície.

4 O espaço tangente a uma variedade produto. Derivadas parciais

Seja $M^m \times N^n$ um produto de variedades C^k (ver Exemplo 4, Seção 4 do Cap. IV).

Em cada ponto $(p,q) \in M \times N$, o espaço tangente $T(M \times N)_{(p,q)}$ contém dois subespaços importantes E, F. O primeiro, E, consta de todos os vetores-velocidade $\lambda'(0)$ de caminhos do tipo $\lambda(t) = (\lambda_1(t), q)$, enquanto que o segundo, F, é formado pelos vetores-velocidade $\mu'(0)$ dos caminhos da forma $\mu(t) = (p, \mu_2(t))$. Tomando um sistema de coordenadas $x \times y$ em torno de (p,q), vê-se facilmente que o isomorfismo $(x \times y)'\colon T(M \times N)_{(p,q)} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ leva E sobre $\mathbb{R}^m \times 0$ e F sobre $0 \times \mathbb{R}^n$.

Conseqüentemente, $T(M \times N)_{(p,q)} = E \oplus F$.

Do Exemplo 5, Seção 1, do Cap. V, resulta que as projeções $\pi_1\colon M \times N \to M$, $\pi_2\colon M \times N \to N$, e as inclusões $i_q\colon M \to M \times q \subset M \times N$, $j_p\colon N \to p \times N \subset M \times N$ são de classe C^k. As duas primeiras são as coordenadas da aplicação identidade de $M \times N$, enquanto que as duas últimas têm uma coordenada constante e a outra é a identidade.

As relações $\pi_1 \circ i_q = \mathrm{id}\colon M \to M$ e $\pi_2 \circ j_p = \mathrm{id}\colon N \to N$ acarretam (pela regra da cadeia) que i_q e j_p são mergulhos de

classe C^k (logo $M \times q$ e $p \times N$ são subvariedades C^k de $M \times N$) e que as derivadas de π_1 e π_2 em (p,q) são sobrejetoras.

É óbvio que $T(M \times q)_{(p,q)} = E$ e $T(p \times N)_{(p,q)} = F$.

Identificamos E e F com TM_p e TN_q respectivamente, por meio dos isomorfismos $i'_q(p)\colon TM_p \to E$ e $j'_p(q)\colon TN_q \to F$.

Escrevemos finalmente $T(M \times N)_{(p,q)} = TM_p \oplus TN_q$.

As *derivadas parciais* de uma aplicação diferenciável $f\colon M \times N \to P$ são aplicações lineares $\partial_1 f(p,q)\colon TM_p \to TP_{f(p,q)}$ e $\partial_2 f(p,q)\colon TN_q \to TP_{f(p,q)}$, definidas como sendo as derivadas das aplicações $f \circ i_q\colon M \to P$ e $f \circ j_p\colon N \to P$ nos pontos $p \in M$ e $q \in N$, respectivamente.

Tomando em $M \times N$ sistemas de coordenadas locais do tipo $x \times y$, a "nova" noção de derivada parcial reduz-se a "antiga", vista na Seção 6, Capítulo I.

Por conseguinte, valem todos os resultados locais vistos no Capítulo I, tais como o teorema das funções implícitas, o teorema da função inversa e a forma local das submersões. O leitor está convidado a estender formalmente as generalizações destes teoremas ao contexto das variedades.

5 A classe de uma subvariedade

Na definição de subvariedade, não demos muita atenção à sua classe de diferenciabilidade. Por isso, talvez seja interessante esclarecer, por meio de um exemplo, que uma variedade N, de classe C^k, pode possuir uma subvariedade M, de classe C^r, $r < k$, de tal modo situada em N que não existe em M uma estrutura de variedade C^{r+1} tomando-a uma subvariedade de N.

Seja $N = \mathbb{R}^2$, com sua estrutura habitual de variedade de clase C^∞ e $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^4 = y^3\}$. Então $M = f^{-1}(0)$, onde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função de classe C^∞ definida por $f(x,y) = x^4 - y^3$.

Se $0 \in \mathbb{R}$ fosse um valor regular de f, M seria uma subvariedade de classe C^∞ do $\mathbb{R}^2$. (Seção 5.2, Cap. II.) Tal não é o caso. Apesar disso, M é ainda uma subvariedade de classe C^1 do $\mathbb{R}^2$, pois é o gráfico da função $y = x^{4/3}$, de classe C^1.

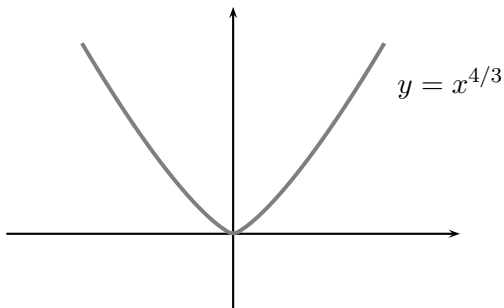



Figura 6.4.

Suponhamos que M pudesse receber uma estrutura de variedade de classe C^2 do $\mathbb{R}^2$. A projeção $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x, y) = x$, daria origem a uma função $\varphi = \pi|M\colon M \to \mathbb{R}$, de classe C^2. Como φ é um homeomorfismo e em nenhum ponto de M o espaço tangente TM_p é vertical, φ seria um difeomorfismo de clase C^2. Sua inversa $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R} \to M$ seria uma aplicação de classe C^2, do tipo $t \mapsto (t, g(t))$, $g \in C^2$. Isto implicaria imediatamente $g(t) = t^{4/3}$, uma contradição, pois $t^{4/3}$ não é C^2.

O homeomorfismo $\varphi = \pi|M$ pode ser usado para transportar a estrutura de variedade C^∞ de $\mathbb{R}$ para M: o sistema de coordenadas $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ está contido em um único atlas máximo $\mathfrak{A} \in C^\infty$ em M. No entanto, a variedade de classe C^∞ $(M, \mathfrak{A})$ é apenas uma subvariedade de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$, pois a inclusão $i\colon M \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 mas não é de classe C^2.

Podem-se dar exemplos semelhantes para cada r. Por exemplo, o gráfico de $y = |y|^{r+1}$ é somente uma subvariedade de classe C^r de $\mathbb{R}^2$.

6 Imersões cujas imagens são subvariedades

Uma imersão $f\colon M \to N$ pode deixar de ser um mergulho por dois motivos:

(i) f não é injetiva.

O exemplo típico é a aplicação de classe C^∞, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(t) = (2\cos t + t, \operatorname{sen} t)$.

Figura 6.5.

(ii) f é injetiva mas $f\colon M \to f(M) \subset N$ não é um homeomorfismo, onde $f(M)$ tem a topologia induzida pela de N. (Ver Fig. 6.6.)

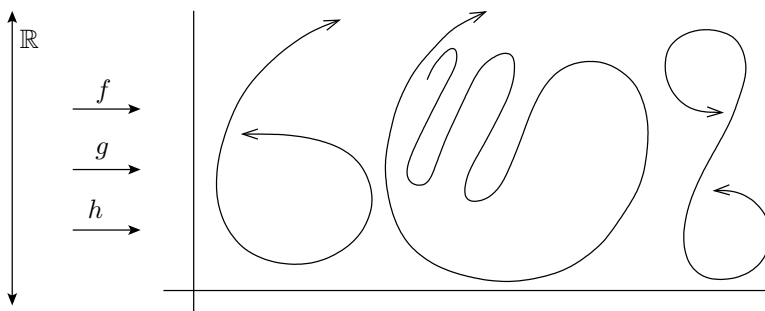



Figura 6.6.

Notemos que em nenhum dos exemplos da Fig. 6, $f(\mathbb{R})$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$. Notemos também que $f\colon \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ (com a topologia induzida) não é *aberta*.

Uma imersão de classe C^k $(k \geq 1)$ $f\colon M \to N$ é localmente injetiva. Mais precisamente, cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $f|U$ é um mergulho (Proposição 1).

Quando $\dim M = \dim N$, uma imersão $f\colon M \to N$ é na realidade um *difeomorfismo local*: cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U que é levada difeomorficamente por f sobre uma *vizinhança* de $f(p)$. Em particular, quando $\dim M = \dim N$, uma imersão é uma aplicação aberta.

A proposição abaixo mostra em que condições a imagem de uma imersão $f\colon M \to N$ é uma subvariedade.

Proposição 5. *Seja $f\colon M^m \to N^n$ uma imersão de classe C^k $(k \geq 1)$. Então $f(M)$ é uma subvariedade de dimensão m e classe C^k de N se, e somente se, $f\colon M \to f(M)$ é uma aplicação aberta ($f(M)$ com a topologia induzida pela de N). Em particular, se f é um mergulho então $f(M)$ é uma subvariedade de N.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $f\colon M \to f(M)$ seja aberta. Cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U, domínio de um sistema de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ tal que $f|U$ é um mergulho (ver Proposição 1) e $f(U) = V$ é aberto em $f(M)$.

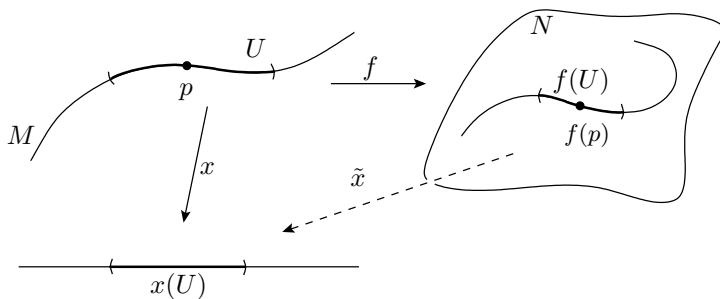



Figura 6.7.

As aplicações $\bar{x} = x \circ (f|U)^{-1} \colon V \to \mathbb{R}^m$, assim obtidas, definem um atlas de classe C^k em $f(M)$. Pela Proposição 3, $f(M)$ é de fato uma subvariedade de classe C^k de N.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $f(M)$ seja uma subvariedade de classe C^k de N. Então, pela Proposição 2, $f\colon M \to f(M)$ é uma imersão de classe C^k, e portanto uma aplicação aberta.

$\ldots$ logo $f \in C^k$.

Exemplos:

1) A aplicação $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por $f() = e^{it}$, é uma imersão C^∞ tal que $f\colon \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) = S^1$ é uma subvariedade C^∞ do $\mathbb{R}^2$.

2) Seja $g\colon S^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por $g(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Então $g\colon S^2 \to g(S^2)$ é uma imersão C^∞ aberta, pois $P^2 = g(S^2)$ é uma subvariedade do $\mathbb{R}^4$.

Observações:

1) Note-se que, na Proposição 5, não estamos supondo f injetiva!

2) Será mostrado brevemente que uma aplicação de classe C^1 não pode transformar uma variedade em outra de dimensão maior. Por conseguinte, não será preciso admitir, no enunciado da Proposição 5, que $f(M)$ é m-dimensional.

3) Um problema interessante é o de investigar condições suficientes para que uma imersão $f\colon M \to N$ seja um mergulho. Por exemplo, quando M é compacta toda imersão injetiva $f\colon M \to N$ é um homeomorfismo sobre $f(M)$, logo um mergulho. Isto porque toda aplicação contínua e injetiva de um espaço compacto sobre um espaço de Hausdorff é um homeomorfismo. Outra condição suficiente é a seguinte.

4) **Mergulhos próprios**.

Dada uma seqüência (p_n) em uma variedade M, escrevemos $p_n \to \infty$ para indicar que (p_n) não possui nenhuma subseqüência convergente. Dada uma aplicação $f\colon M \to N$ entre variedades, chama-se *conjunto-limite de* f ao conjunto

$$L(f) = \{q \in N;\, q = \lim f(p_n),\, p_n \to \infty \text{ em } M\}.$$

Uma aplicação $f\colon M \to N$, entre variedades, denomina-se *aplicação própria* quando é contínua e $p_n \to \infty$ em M acarreta $f(p_n) \to \infty$ em N. Em outras palavras, $L(f) = \emptyset$. É fácil ver, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, que isto é equivalente a dizer que para cada compacto $K \subset N$, $f^{-1}(K) \subset M$ é compacto. Toda aplicação própria é fechada.

Em particular, uma imersão injetiva própria é um mergulho e, além disso, $f(M)$ é um subconjunto fechado de N.

A inclusão $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i(x) = (x, 0)$ é um mergulho próprio de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$.

Um segmento de reta aberto e limitado em $\mathbb{R}^2$ é imagem de um mergulho $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que não é uma aplicação própria.

As figuras abaixo são exemplos ilustrativos de mergulhos não próprios de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$.

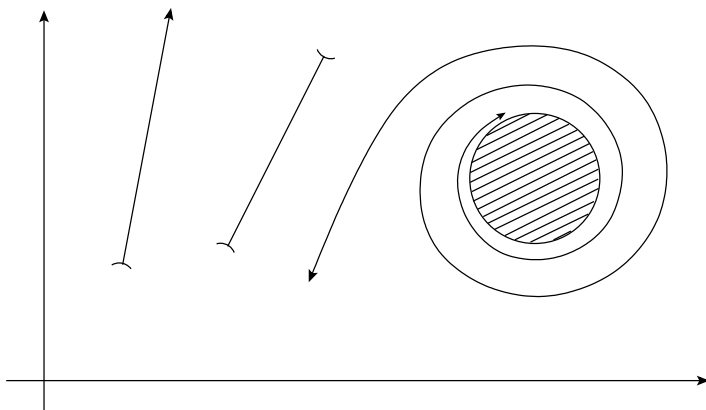



Figura 6.8.

7 A curva de Kronecker no toro

O toro de dimensão 2, $T^2 \subset \mathbb{R}^3$, é a imagem de $\mathbb{R}^2$ pela aplicação $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, de classe C^∞, dada por $f(x,y) = (2\cos 2\pi x + \cos 2\pi y \cdot \cos 2\pi x, 2\,\text{sen}\, 2\pi x + \cos 2\pi y \cdot \text{sen}\, 2\pi x, \text{sen}\, 2\pi y)$.

É fácil ver que

(i) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão de classe C^∞.

(ii) $f(x,y) = f(x',y') = x' - x \in \mathbb{Z}$, $y' - y \in \mathbb{Z}$.

Mostremos agora que a aplicação $f\colon \mathbb{R}^2 \to T^2$ é *aberta*. Resultará então da Proposição 5 que T^2 é uma superfície de dimensão 2 e classe C^∞ no espaço $\mathbb{R}^3$.

Seja $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ o subgrupo aditivo formado pelos vetores de coordenadas inteiras. Dados $w, w' \in \mathbb{R}^2$, temos $f(w) = f(w') \Leftrightarrow$

$w - w' \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ou seja, a relação de equivalência definida por f em $\mathbb{R}^2$ tem por classes de equivalência as classes laterais do subgrupo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$. Consideremos a aplicação canônica $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, tomando valores no grupo quociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (munido da topologia quociente). Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto, temos $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} A + r$, uma reunião de abertos. Segue-se que $\pi(A)$ é aberto em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde π é uma aplicação aberta. Notemos ainda que o grupo quociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é compacto, pois é a imagem do compacto $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ pela aplicação contínua π.

Temos o diagrama comutativo clássico:

onde $\bar{f}$ é a bijeção contínua induzida por f. Como $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ é Hausdorff e o domínio de f é compacto, segue-se que $\bar{f}$ é um homeomorfismo. Conseqüentemente f é aberta, pois $\bar{f}$ constitui uma "equivalência" entre f e π.

Assim $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície C^∞ e $f\colon \mathbb{R}^2 \to T^2$ é uma imersão.

Através do homeomorfismo $\bar{f}$, transporta-se para o grupo quociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ a estrutura de variedade C^∞ que T^2 possui, o que torna π uma imersão e $\bar{f}$ um difeomorfismo, ambos C^∞.

As imagens dos caminhos $x \mapsto f(x, y_0)$, $y \mapsto f(x_0, y)$ chamam-se respectivamente os *paralelos* e os *meridianos* de T^2.

Consideremos os caminhos no toro do tipo $T \mapsto f \circ \lambda(t)$, $\lambda(t) = (t, at) \in \mathbb{R}^2$.

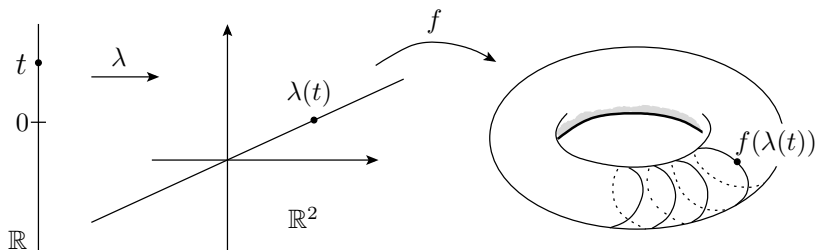



Figura 6.9.

Se $a = m/n$ é um número racional (na forma mais simples) então $f\lambda(\mathbb{R})$ é uma curva fechada em T^2. Com efeito, $f\lambda(0) = f\lambda(n)$ pois $\lambda(0) = (0,0)$ e $\lambda(n) = (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Geometricamente, $f\lambda(\mathbb{R})$ intersecta cada meridiano n vezes e cada paralelo m vezes.

Suponhamos agora que a seja um número irracional. Então, para $s \neq t \in \mathbb{R}$, o ponto $\lambda(s) - \lambda(t) = (s-t, a\cdot(s-t)) \in \mathbb{R}^2$ jamais terá ambas as coordenadas inteiras. Por conseguinte, $f \circ \lambda \colon \mathbb{R} \to T^2$ é uma *imersão injetiva.* Sua imagem $f \circ \lambda(\mathbb{R})$ é chamada a *curva de Kronecker* no toro. Geometricamente, a curva de Kronecker dá infinitas voltas em torno de cada paralelo e de cada meridiano do toro, fazendo com todos eles um ângulo constante.

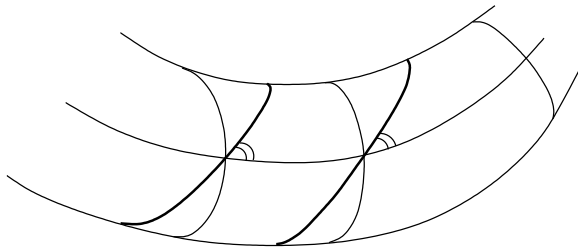



Figura 6.10.

Provaremos agora que a *curva de Kronecker é um subconjunto denso do toro.* Como f é um homeomorfismo local de $\mathbb{R}^2$ sobre T^2, é suficiente mostrar que os pontos de $\mathbb{R}^2$ que se aplicam por f em pontos da curva de Kronecker formam um conjunto denso em $\mathbb{R}^2$. Explicitamente, devemos provar que o conjunto

$$X = \{(t+m, at+n);\ t \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

é denso em $\mathbb{R}^2$ quando a é irracional.

Usaremos o

Lema. *Se a é um número irracional, então o conjunto $G = \{ma + n;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Como G é subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ é suficiente mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $g \in G$ com $0 < g < \varepsilon$ (com efeito, se isto ocorrer, os múltiplos kg, $k \in Z$, decomporão a reta em intervalos de comprimento $< \varepsilon$). Escrevamos $G^+ = \{g \in G; g > 0\}$. Suponhamos, por absurdo, que $0 < \beta = \inf G^+$. Afirmação: neste caso, $\beta \in G^+$. Realmente, se fosse $\beta \notin G^+$, existiriam, pela definição de ínfimo, elementos distintos de G^+ arbitrariamente próximos de β. A diferença entre dois dos tais elementos é arbitrariamente pequena e é ainda um elemento de G^+. Portanto $\beta \in G^+$. Afirmação: G é gerado por β. Dado $g \in G$, escrevamos $|g| = q\beta + r$, $q \in Z$, $0 \leq r < \beta$. Então $r = |g| - q\beta \in G$, logo $r = 0$, donde $|g| \in G$ e portanto $g \in G$. Escrevamos $a = n\beta$ e $a + 1 = m\beta$ como elementos de G. Então $1 = (m-n)\beta$, ou seja, β é racional, donde a é racional, o que é uma contradição. Isto conclui a demonstração do lema.

Mostremos agora que X é denso em $\mathbb{R}^2$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\varepsilon > 0$, existem, pelo lema, $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $|y - ax - a\tilde{m} - n| < \varepsilon$. Escrevamos $t = x + \tilde{m}$, $m = -\tilde{m}$. Então $(t+m, at+n) = (x, ax + a\tilde{m} + n)$. Logo $d((x,y), (t+m, at+n)) < \varepsilon$.

Por vários motivos, a imersão injetiva $f \circ \lambda\colon \mathbb{R} \to T^2$ não é um mergulho. Um deles é que a curva de Kronecker $f \circ \lambda(\mathbb{R})$ não é localmente conexa. Outro é que, em virtude da Proposição 4, quando $m < n$, uma subvariedade $M^m \subset N^n$ não pode ser um subconjunto denso de N.

Capítulo VII

Submersões, Transversalidade

Os conceitos de valor regular e submersão generalizam-se facilmente ao contexto das Variedades Diferenciáveis, assim como todos os resultados obtidos em capítulos anteriores: a forma local das submersões, o teorema da função inversa, etc...

Vários exemplos serão discutidos: as aplicações do círculo S^1 e dos planos projetivos P^n, os grupos de Lie.

Concluimos o capítulo com uma exposição do conceito de transversalidade, introduzido por René Thom.

1 Submersões

Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação de classe C^k, $k \geq 1$. Um ponto $c \in N$ diz-se um *valor regular* de f se, para cada $p \in f^{-1}(c)$, a derivada $f'(p)\colon TM_p \to TN_c$ é sobrejetiva.

Quando $c \in N - f(M)$ então c é obviamente um valor regular de f. Se algum $c \in f(M)$ é valor regular de f, então $\dim M \geq \dim N$.

O resultado abaixo estende o Teorema 1, Capítulo II.

Proposição 1. *Seja $c \in N$ um valor regular de uma aplicação $f\colon M^m \to N^n$, de classe C^k $(k \geq 1)$. Então, ou bem $f^{-1}(c)$ é vazio, ou bem $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade $(m-n)$-dimensional de M, de classe C^k. O espaço tangente a $f^{-1}(c)$ em cada ponto p é o núcleo de $f'(p)\colon TM_p \to TN_c$.*

Demonstração: Se $f^{-1}(c) \neq \emptyset$, seja $p \in f^{-1}(c)$. Tomemos coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, $p \in U$ e $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ em N, $c = f(p) \in V$, com $f(U) \subset V$. Então $y(c)$ é valor regular da aplicação $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}\colon x(U) \to \mathbb{R}^n$.

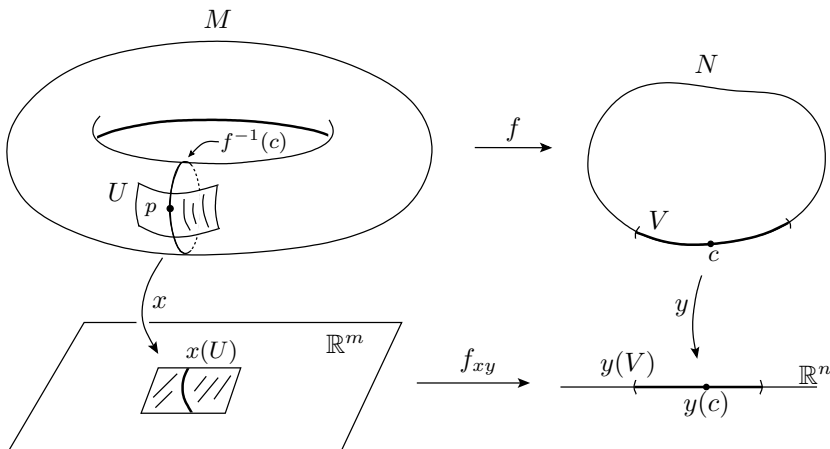



Figura 7.1.

Pelo Teorema 1, Capítulo II, $f_{xy}^{-1}(y(c))$ é uma superfície de dimensão $m-n$ e classe C^k no $\mathbb{R}^m$. Pela Proposição 5, $x^{-1}(f_{xy}^{-1}(y(c))) = f^{-1}(c) \cap U$ e uma subvariedade de classe C^k de

M. Do corolário da Proposição 4 resulta que $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade de M. A afirmação sobre o espaço tangente é deixada para o leitor.

Proposição 2 (Forma local das submersões para variedades.) *Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Suponha que no ponto $p \in M$ a derivada $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$ seja sobrejetiva. Então existem um sistema de coordenadas $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ em N, $f(p) \in V$, e um mergulho de classe C^k, $x\colon U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, ($x$ será um sistema de coordenadas em M se $M \in C^k$) tais que $x(U) = W \times Z$, $f(U) \subset V$ e $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}\colon W \times Z \to \mathbb{R}^n$ é da forma $f_{xy}(w,z) = w$. Em particular, o conjunto X dos pontos $p \in M$ onde f tem derivada sobrejetiva é aberto e $f|X$ é uma aplicação aberta.*

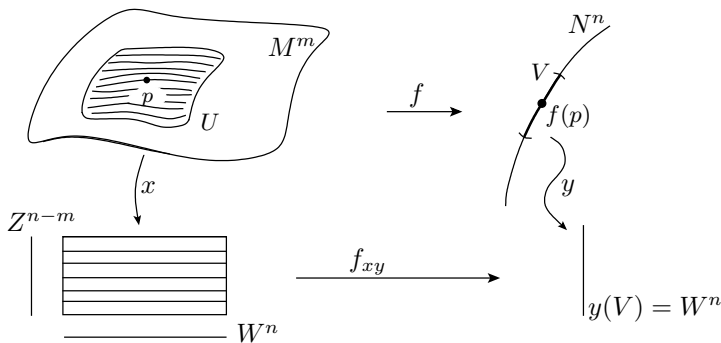



Figura 7.2.

Demonstração: Resulta imediatamente da forma local das submersões. (Vide Seção 8, Cap. I.) Deixamos ao leitor a verificação dos detalhes.

Diz-se que uma aplicação diferenciável $f\colon M \to N$ é uma *submersão* se todo $c \in N$ for valor regular de f. Isto é equivalente a dizer que para cada $p \in M$ a derivada $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$ é sobrejetiva.

Observações:

1) Pela Proposição 2, toda submersão é uma aplicação aberta.

2) Se $f\colon M \to N$ é uma submersão, então $\dim M \geq \dim N$.

3) Quando $\dim M = \dim N$ os conceitos de submersão, imersão e difeomorfismo local coincidem.

4) As imersões e as submersões são chamadas aplicações de *posto máximo*. (O posto de uma aplicação diferencável $f\colon M \to N$, no ponto $p \in M$, é a dimensão da imagem de $f'(p)$.)

Proposição 3. *Seja $f\colon M \to N$ uma submersão sobrejetiva de classe C^k. Uma aplicação $g\colon N \to P$ é de classe C^k se, e somente se, $g \circ f\colon M \to P$ é de classe C^k.*

Demonstração: Suponhamos que $g \circ f\colon M \to P$ seja de classe C^k. Dado $c \in N$, arbitrário, existe $a \in M$ tal que $c = f(a)$. Sejam $x\colon U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $a \in U$, um difeomorfismo de classe C^k ($U \subset M$ aberto) e $y\colon V \to \mathbb{R}^n$, $c \in V$, um sistema de coordenadas em N tais que $f(U) \subset V$ e $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}\colon (w,z) \mapsto w$. Então $g \circ f \circ x^{-1} = g \circ y^{-1} \circ f_{xy}\colon (w,z) \mapsto gy^{-1}(w)$. Por hipótese, $g \circ f \circ x^{-1}\colon x(U) \to P$ é de classe C^k. Por conseguinte $g \circ y^{-1}\colon y(V) \to P$ é de classe C^k, logo $g \in C^k$. A recíproca é óbvia.

Corolário. *Sejam M uma variedade de classe C^k, N um conjunto e $f\colon M \to N$ uma aplicação sobrejetiva. Então existe no máximo uma estrutura de variedade de classe C^k em N que torna f uma submersão de classe C^k.*

Demonstração: Sejam N_1 e N_2 estruturas de variedade C^k em N tais que $f_1 = f\colon M \to N_1$ e $f_2 = f\colon M \to N_2$ são ambas submersões de classe C^k. Consideremos a aplicação identidade $i\colon N_1 \to N_2$. Como $i \circ f_1 = f_2$ é de classe C^k segue-se da proposição que $i\colon N_1 \to N_2$ é de classe C^k. Analogamente, $j\colon N_2 \to N_1$ é de classe C^k. Por conseguinte, $N_1 = N_2$.

Exemplo

O espaço projetivo P^n tem a única estrutura diferenciável que torna $\pi\colon S^n \to P^n$ uma submersão de classe C^∞.

Observação. O leitor não deixará de perceber a assimetria existente entre a Proposição 2 do Capítulo VI e a Proposição 3 do Capítulo VII, bem como entre seus corolários.

Esta assimetria resulta do fato seguinte: se $f\colon M \to N$ é uma submersão sobrejetiva de classe C^1, então a topologia de N fica perfeitamente determinada por f e M, pois f é uma aplicação contínua e aberta. Segue-se daí que N tem a topologia co-induzida por f.

Por outro lado, para uma imersão injetiva $f\colon M \to N$, a topologia de N não determina a de M. As figuras abaixo ilustram várias topologias em $M \subset \mathbb{R}^2$ para as quais $i\colon M \to \mathbb{R}^2$ é uma imersão C^∞:

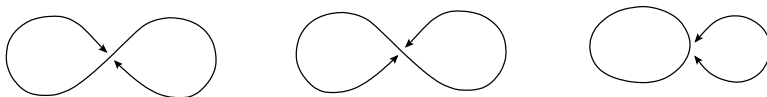



Figura 7.3.

2 Relações de simetria

2.1 - Aplicações do círculo S^1

A aplicação exponencial $\xi\colon \mathbb{R} \to S^1$, dada por $\xi(t) = e^{it}$, é uma submersão de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ sobre S^1.

Pela Proposição 3, um aplicação $f\colon S^1 \to M$, do círculo S^1 numa variedade diferenciável M, é de classe C^k se, e somente se, $g = f \circ \xi\colon \mathbb{R} \to M$ é um caminho de classe C^k em M.

Na realidade, as aplicações $g\colon \mathbb{R} \to M$ do tipo $g = f \circ \xi$ são precisamente os caminhos em M tais que $g(t + 2\pi) = g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, os caminhos periódicos de classe C^k, $g\colon \mathbb{R} \to M$ (de período $p \in \mathbb{R}$), induzem, por passagem ao quociente, as aplicações de classe C^k, $\bar{g}\colon S^1 \to M$.

A aplicação exponencial $\xi\colon \mathbb{R} \to S^1$ é também uma imersão de classe C^∞. Pela Proposição 2 do Capítulo VI, uma aplicação $g\colon M \to \mathbb{R}$ é de classe C^k se, e somente se, $\xi \circ g\colon M \to S^1$ é de classe C^k.

O círculo S^1 pode também ser considerado como o grupo quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ do grupo aditivo dos números reais pelo subgrupo $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Com efeito, o homomorfismo $\xi\colon \mathbb{R} \to S^1$

induz, por passagem ao quociente, um isomorfismo $\overline{\xi}\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$, o qual é um homeomorfismo pois $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é compacto e S^1 é de Hausdorff. A estrutura de variedade C^∞ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, transportada de S^1 pelo homeomorfismo φ, é a única que faz da projeção canônica $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma submersão.

Considerações análogas podem ser feitas a respeito da identificação do grupo quociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ com o toro n-dimensional $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$. (Vide Seção 7, Cap. III, para o caso $n = 2$.)

2.2 - Aplicações do espaço projetivo P^n

É fácil de ver que a projeção canônica $\pi\colon S^n \to P^n$ é uma submersão de classe C^∞. Por conseguinte, uma aplicação $g\colon P^n \to M$ é de clase C^k se, e somente se, $g \circ \pi\colon S^n \to M$ é de classe C^k. Em outras palavras, as aplicações de classe C^k definidas em P^n são obtidas, por passagem ao quociente, das aplicações $f\colon S^n \to M$ de classe C^k tais que $f(p) = f(-p)$ para todo $p \in S^n$.

Por dualidade, uma aplicação $f\colon M \to S^n$ é da classe C^k se, e só se, $\pi \circ f\colon M \to P^n$ é de classe C^k, pois π é também uma imersão.

2.3 - Um difeomorfsmo entre P^1 e S^1

Consideremos a aplicação de classe C^∞, $f\colon S^1 \to S^1$, definida por $f(z) = z^2$. É claro que f é sobrejetiva e $f(z) = f(w) \Leftrightarrow$

$z = \pm w$. f induz uma bijeção contínua (logo um homeomorfismo, pois P^1 é compacto) de classe C^∞, $g\colon P^1 \to S^1$, caracterizada por $g \circ \pi = f$.

Pela regra da cadeia, para provar que $g\colon P^1 \to S^1$ é um difeomorfismo local, basta mostrar que f é uma imersão. Isto é claro, pois $f'(z)\colon T(S^1)_z \to T(S^1)_{z^2}$ é dada por $f'(z) \cdot h = 2z \cdot h$ (multiplicação de números complexos). Logo $g\colon P^1 \to S^1$ é um difeomorfismo de classe C^∞.

Nota: Este fato é válido apenas para $n = 1$.

3 Grupos de Lie

Um *grupo de Lie* é uma variedade G, de classe C^∞, dotada de uma estrutura de grupo cuja multiplicação $m\colon G \times G \to G$, $m(x, y) = xy$, é uma aplicação de classe C^∞.

Provemos que, para cada $x \in G$, as aplicações

$$\begin{array}{lll} \ell_x\colon G \to G, & \ell_x(y) = xy & (\textit{translação à esquerda} \text{ por } x), \\ r_x\colon G \to G, & r_x(y) = yx & (\textit{translação à direita} \text{ por } x), \\ \xi\colon G \to G, & \xi(x) = x^{-1} & (\textit{inversão}) \end{array}$$

são difeomorfismos de classe C^∞.

Da teoria dos grupos sabemos que ℓ_x , r_x e ξ são bijeções. A rigor,

$$(\ell_x)^{-1} = \ell_{x^{-1}}$$
$$(r_x)^{-1} = r_{x^{-1}}$$
$$(\xi)^{-1} = \xi.$$

Basta mostrarmos, então, que as aplicações acima são de classe C^∞.

Consideremos em $G \times G$ a estrutura de variedade produto. Então $j_x \colon G \to G \times G$ definida por $j_x(y) = (x, y)$ é um mergulho de classe C^∞. Como $\ell_x = m \circ j_x$ segue-se que $\ell_x \in C^\infty$. Analogamente, $i_x \colon G \to G \times G$, $i_x(y) = (y, x)$ é um mergulho de classe C^∞ e $r_x = m \circ i_x \in C^\infty$.

Para provar que $\xi \in C^\infty$ faremos uso do Teorema das Funções Implícitas. A multiplicação $m \colon G \times G \to G$ num grupo de Lie é uma submersão, pois

$$\partial_2 m(x, y) = (m \circ j_x)'(y) = \ell_x'(y) \colon TG_y \to TG_{xy}$$

é um isomorfismo.

Por conseguinte, a equação $m(x, y) = e$ ($e \in G$ é o elemento neutro de G) define, na vizinhança de cada $x \in G$, uma aplicação $\eta \in C^\infty$ tal que $m(x, \eta(x)) = x \cdot \eta(x) = e$. Então $\eta(x) = x^{-1}$, ou seja $\eta(x) = \xi(x)$. Assim, temos $\xi \in C^\infty$.

A teoria dos grupos de Lie é um ramo importante da Matemática que se origina das Variedades Diferenciáveis e tem aplicações importantes à Geometria, às Equações Diferenciais e à Física.

Os grupos de Lie de matrizes foram discutidos no fim do Capítulo II.

4 Transversalidade

Sejam $f\colon M \to N$ uma aplicação de classe C^k e $S \subset N$ uma subvariedade C^k de N. Em que condições a imagem inversa $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de classe C^k de M? Uma resposta a esta questão é dada por meio da noção de *transversalidade*. Trata-se de uma generalização natural do conceito de valor regular. Por meio desta noção pode-se dar um significado preciso ao fato de duas figuras se intersectarem em "posição geral".

Sejam $f\colon M^m \to N^n$ uma aplicação de classe C^k e $S^s \subset N^n$ uma subvariedade de classe C^k.

Diz-se que *f é transversal a S no ponto $p \in f^{-1}(S)$* quando $f'(p)\cdot TM_p + TS_{f(p)} = TN_{f(p)}$, ou seja, quando a imagem de $f'(p)$ junto com o espaço tangente a S em $f(p)$ geram $TN_{f(p)}$.

Diz-se que *f é transversal a S* se, para todo ponto $p \in f^{-1}(S)$, f é transversal a S em p.

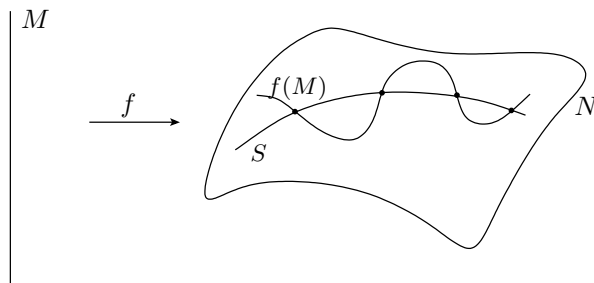



Figura 7.4.

Exemplos

1) $S = \{c\}$.

Então f é transversal a c se, e somente se, c é valor regular de f.

2) $f(M) \cap S = \emptyset$.

Então f é automaticamente transversal a S.

3) Se f é uma submersão então f é transversal a S, qualquer que seja a subvariedade $S \subset N$.

Observação: Se $f(M) \cap S \neq \emptyset$ e f é transverssal a S então $\dim M + \dim N \geq \dim S$. Em outras palavras, quando $\dim M + \dim S < \dim N$, dizer que $f\colon M \to N$ é transversal a S significa que $f(M) \cap S = \emptyset$.

Recordemos que, dada uma subvariedade $S^s \subset N^n$ de classe C^k, existe, para cada $q \in S$, um difeomorfismo de classe C^k, $y\colon V \to \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ ($q \in V \subset N$ aberto), tal que $y(V \cap S) \subset \mathbb{R}^s \times 0$ (Proposição 4, Seção 3, Cap. VI). Seja $U \subset M$ tal que $f(U) \subset V$ e consideremos a segunda projeção $\pi\colon \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \to \mathbb{R}^{n-s}$.

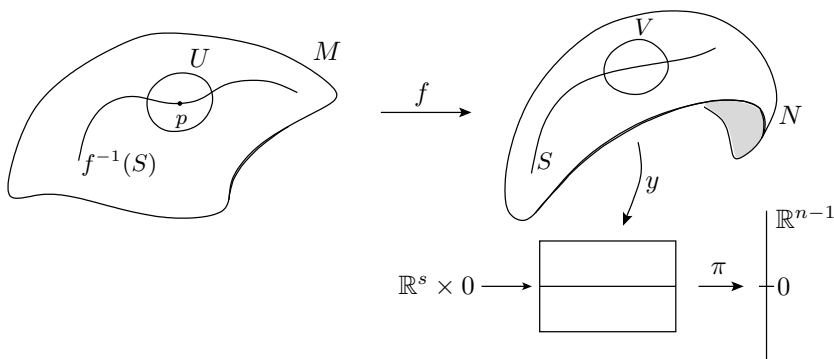



Figura 7.5.

A condição de transversalidade pode ser reduzida à de valor regular:

Lema. *A aplicação $f\colon M \to N$ é transversal a S nos pontos de $U \cap f^{-1}(S)$ se, e somente se, $0 \in \mathbb{R}^{n-s}$ é valor regular de $\pi \circ y \circ (f|U)\colon U \to \mathbb{R}^{n-s}$.*

Demonstração: Seja $p \in U \cap f^{-1}(S) = [\pi \circ y \circ (f|U)]^{-1}(0)$. Ponhamos $f(p) = q$. Então $(y \circ f)'(p) \cdot TM_p = y'(q) \cdot f'(p) \cdot TM_p = E$ e $y'(q) \cdot TS_q = \mathbb{R}^s \times \{0\}$. Como $y'(q) \colon TN_q \to \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ é um isomorfismo, as condições

(i) $f'(p) \cdot TM_p + TS_q = TN_q$

(ii) $E + \mathbb{R}^s \times \{0\} = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$

(iii) $\pi(E) = \mathbb{R}^{n-s}$

(iv) $[\pi \circ y \circ (f|U)]'(p) \cdot TM_p = \mathbb{R}^{n-s}$

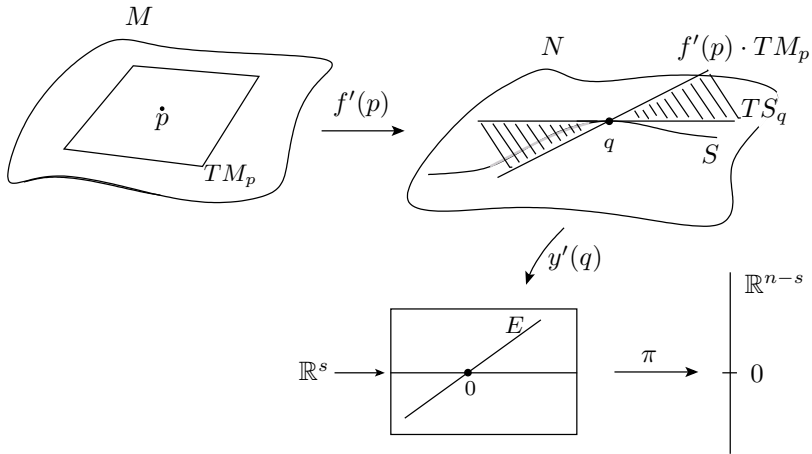



Figura 7.6.

são todas equivalentes, o que conclui a demonstração.

Dada uma subvariedade $S^s \subset N^n$, o número $n - s$ chama-se a *codimensão* de S em N.

Proposição 4. *Seja $f \colon M \to N$ uma aplicação de classe C^k, transversal a uma subvariedade $S \subset N$, de classe C^k. Então*

(i) *Ou bem* $f^{-1}(S) = \emptyset$ *ou bem* $f^{-1}(S)$ *é uma subvariedade de classe* C^k *de* M*, cuja codimensão em* M *é igual à codimensão de* S *em* N*.*

(ii) *Neste caso,* $T(f^{-1}(S))_p = f'(p)^{-1}[TS_{f(p)}]$ *para todo* $p \in f^{-1}(S)$.

Demonstração: Para cada $p \in f^{-1}(S)$, seja $q = f(p) \in V$. Considere um difeomorfismo $y\colon V \to \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ de classe C^k como o do lema. Seja $U \ni p$ um aberto de M tal que $f(U) \subset V$. Pela hipótese de transversalidade, pelo lema e pela Proposição 1, vê-se que $f^{-1}(S) \cap U = [\pi \circ y \circ (f|U)]^{-1}(0)$ é uma subvariedade de M, de dimensão $m-(n-s)$ e classe C^k. O espaço tangente a $f^{-1}(S) \cap U$ em p é o núcleo de $(\pi \circ y \circ f)'(p)$, que é evidentemente a imagem inversa de $[f'(p)]^{-1}\, TS_q$. A proposição fica provada lembrando o corolário da Proposição 4, Seção 3, Cap. VI.

Corolário 1. *Se* $f\colon M \to N$ *é uma submersão de classe* C^k *então, para toda subvariedade* $S \subset N$ *de classe* C^k*,* $f^{-1}(S)$ *é o conjunto vazio ou uma subvariedade de* M *de classe* C^k*.*

Corolário 2. *Sejam* N^n*,* $S^s \subset M^m$ *subvariedades de classe* C^k*. Se* $N \cap S \neq \emptyset$ *e se em cada ponto* $p \in N \cap S$*,* $TN_p + TS_p = TM_p$*, então* $N \cap S$ *é uma subvariedade de* M *cuja dimensão é* $n+s-m$*. Além disso* $T(N \cap S)_p = TN_p \cap TS_p$*.*

Em particular, se M^2, $N^2 \subset \mathbb{R}^3$ são de classe C^k tais que, em cada ponto $p \in M \cap N$, os planos tangentes TM_p e TN_p são distintos, então $M \cap N$ é uma curva de classe C^k em $\mathbb{R}^3$.

Outro caso especial ocorre quando M^n, $S^{m-n} \subset M^m$ são tais que $TN_p \oplus TS_p = TM_p$ em todo $p \in N \cap S$. Então $N \cap S$ é uma variedade de dimensão 0, isto é, um conjunto discreto de pontos em M.

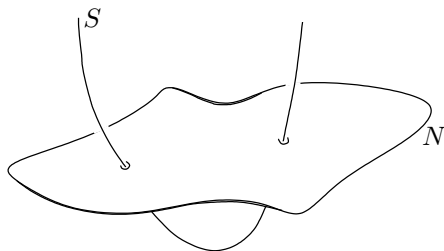
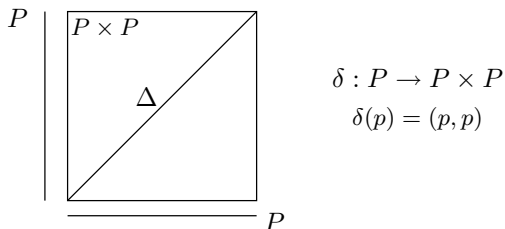



Figura 7.7.

Se duas subvariedades $N, S \subset M$ são tais que $TN_p + TS_p = TM_p$ em todo ponto $p \in N \cap S$, dizemos que N e S estão em *posição geral*, ou que se cortam *transversalmente*.

5 Transversalidade de funções

Diz-se que duas aplicações diferenciáveis $f\colon M \to P$, $g\colon N \to P$ são *transversais* nos pontos $p \in M$, $q \in N$, se $f(p) = g(q) = r \in P$ e $TP_r = f'(p) \cdot TM_p + g'(q) \cdot TN_q$.

Seja $f \times g\colon M \times N \to P \times P$ definida por $(f \times g)(p, q) = (f(p), g(q))$. A diagonal $\Delta = \{(p, p); p \in P\} \subset P \times P$ é uma subvariedade de $P \times P$ difeomorfa a P através da aplicação δ:

Proposição 5. *Duas aplicações diferenciáveis $f\colon M \to P$, $g\colon N \to P$ são transversais nos pontos $p \in M$, $q \in N$ $\quad (f(p) = g(q) = r)$ se, e somente se, $f \times g\colon M \times N \to P \times P$ é transversal a $\Delta \subset P \times P$ em (p, q).*

Demonstração: Da Álgebra Linear sabemos que, dados dois subespaços $A, B \subset E$ de um espaço vetorial E, temos $A + B = E$, se, e somente se, $(A \times B) + D = E \times E$, onde D é a diagonal de $E \times E$. O resultado segue-se daí, tomando

$$A = f'(p) \cdot TM_p\,, \qquad B = g'(q) \cdot TN_q\,, \qquad E = TP_r$$
$$A \times B = (f \times g)'(p,q) \cdot T(M \times N)_{(p,q)} = f'(p) \times g'(q) \cdot TM_p \times TN_q$$
$$D = T\,\Delta_{r,r)}\,.$$

Quando $f\colon M \to P$, $g\colon N \to P$ são transversais em todos os pares $p \in M$, $q \in N$ com $f(p) = g(q)$ dizemos simplesmente que f e g são transversais. Por exemplo, se uma das aplicações f, g for uma submersão, então f e g serão transversais.

Proposição 6. *Se duas aplicações $f\colon M \to P$, $g\colon N \to P$, de classe C^k $(k \geq 1)$, são transversais então o conjunto $Q = \{(p,q) \in M \times N; f(p) = g(q)\}$ é uma subvariedade de $M \times N$, de classe C^k e $\dim Q = \dim M + \dim N - \dim P$.*

Demonstração: Basta observar que $Q = (f \times g)^{-1}(\Delta)$ e aplicar as Proposição 4 e 5.

Exemplos

Qualquer aplicação $f\colon M \to N$ de classe C^k é transversal a $i\colon N \to N$, pois a última é uma submersão. Por conseguinte, $Q = \{(p,q) \in M \times N; q = f(p)\}$ é uma subvariedade de classe C^k de $M \times N$, e $\dim Q = \dim M$. Obviamente, Q é o *gráfico* de f. Isto podia ser visto de outro modo, pois Q é a imagem de M pelo mergulho $\tilde{f}\colon M \to M \times N$, $\tilde{f}(p) = (p, f(p))$.

Sejam $f\colon M^m \to N^n$ uma submersão de classe C^k e $\Gamma = \{(p,q) \in M \times M; f(p) = f(q)\}$ o *gráfico* da equivalência induzida por f. Então Γ é uma subvariedade de N, de classe C^k e dimensão $2m - n$.

6 Aplicações de posto constante

Lembremos que o posto de uma aplicação diferenciável $f\colon M^m \to N^n$ no ponto $p \in M$ é a dimensão da imagem da sua derivada $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$.

Se $f\colon M^m \to N^n$ é de classe C^k, onde $k \geq 1$, então o posto de f num ponto $p \in M$ é uma função semi-contínua inferiormente do ponto p. Isto significa que cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança V tal que o posto de f em todos os pontos de V é maior do que ou igual ao posto de f no ponto p.

É claro o que significa dizer que $f\colon M^m \to N^n$ tem posto constante. Por exemplo, imersões e submersões são aplicações de posto constante.

Sejam G, H grupos de Lie e $f\colon G \to H$ um homomorfismo diferenciável. Então f tem posto constante. Com efeito, sendo f um homomorfismo, dados $a, p \in G$ arbitrários, temos $f(a \cdot p) = f(a) \cdot f(p)$, o que se pode escrever como $f \circ \ell_a = \ell_{f(a)} \circ f\colon G \to H$, usando as translações à esquerda $\ell_a\colon G \to G$ e $\ell_{f(a)}\colon H \to H$. Tomando $p, q \in G$ quaisquer e pondo $a = gp^{-1}$, temos então os diagramas comutativos:

$$
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\ \ell_a\ } & G \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
H & \xrightarrow[\ \ell_{f(a)}\ ]{} & H
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
TG_p & \xrightarrow{\ \ell'_a\ } & TG_q \\
{\scriptstyle f'(p)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'(q)} \\
TH_{f(p)} & \xrightarrow[\ \ell'_{f(a)}\ ]{} & TH_{f(q)}
\end{array}
$$

onde as derivadas ℓ'_a e $\ell'_{f(a)}$ são tomadas nos pontos p e $f(p)$ respectivamente. Como estas transformações lineares são isomorfismos, concluimos que $f'(p)$ e $f'(q)$ têm o mesmo posto.

Proposição 7. (Teorema do posto para variedades.) *Seja* $f\colon M^m \to N^n$ *uma aplicação de classe* C^k $(k \geq 1)$ *de posto constante* r*, entre variedades de classe* C^k*. Para todo ponto* $p \in M$ *existem sistemas de coordenadas* $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ *em* M*, com* $p \in U$*, e* $y\colon V \to \mathbb{R}^n$ *em* N*, com* $q = f(p) \in V$*, tais que* $y \circ f \circ x^{-1}\colon (x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$.

Demonstração: Conseqüência imediata do teorema do posto em espaços euclidianos. (Vide Seção 10, Cap. I.)

Proposição 8. *Seja* $f\colon M^m \to N^n$ *de classe* C^k $(k \geq 1)$ *e posto constante* r*. Para cada* $q \in N$*, se* $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ *então* $f^{-1}(q)$ *é uma subvariedade de classe* C^k *e dimensão* $m - r$ *em* M*.*

Demonstração: Dado $p \in f^{-1}(q)$, tomemos coordenadas x, y como na Proposição 7. Sejam $x(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ e $y(q) = (a, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$. Então $x(U \cap f^{-1}(q)) = a \times U_2$, o que permite considerar $x|(U \cap f^{-1}(q))$ como um sistema de coordenadas locais em $f^{-1}(q)$, tomando valores no aberto $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-r}$.

Como aplicação da Proposição 8, concluimos que, se $f\colon G \to H$ é um homomorfsimo C^∞ entre grupos de Lie, seu núcleo $K = f^{-1}(e)$ é um subgrupo normal fechado, o qual é uma subvariedade de G e portanto um grupo de Lie.

A Proposição 8 permite ainda estender para variedades os resultados finais da Seção 10, Cap I. Enunciaremos tais fatos sem demonstração. O leitor poderá supri-las.

Proposição 9. *Seja* $f\colon M^m \to N^n$ *uma aplicação de classe* C^k $(k \geq 1)$*. Para cada* $r = 0, 1, \dots, s$ $(s = \min\{m, n\})$ *seja* A_r *o interior do conjunto dos pontos* $p \in M$ *nos quais* f *tem posto* r*. Então* $A = A_0 \cup \cdots \cup A_s$ *é (aberto e) denso em* M*.*

Corolário 1. *O posto de* f *é constante em cada componente conexa de um subconjunto aberto e denso* $A \subset M$*.*

Corolário 2. *Se f é injetora, então $m \leq n$ e o conjunto dos pontos $p \in M$ onde f tem posto m é aberto e denso em M.*

Corolário 3. *Se f é aberta, então $m \geq n$ e o conjunto dos pontos $p \in M$ nos quais f tem posto n é aberto e denso em M.*

Capítulo VIII

Partições da Unidade e suas Aplicações

1 Funções auxiliares

Indicaremos com $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^m; |x| < r\}$ a bola aberta de centro em $0 \in \mathbb{R}^m$ e raio r. Quando houver necessidade, escreveremos $\mathbb{R}^m(r)$ em vez de $B(r)$.

Seja M^m uma variedade de classe C^k. Dados um ponto $p \in M$ e um aberto $p \in A \subset M$ existem sempre um aberto U, com $p \in U \subset A$, e um sistema de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ tal que $x(U) = B(3)$.

[Tomamos um qualquer sistema de coordenadas y em torno de p; por translação, podemos supor que $y(p) = 0$. Existe $r > 0$ tal que $y^{-1}(B(r)) \subset A$. Pomos $U = y^{-1}((r))$ e $x = h \circ y$ onde $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é a homotetia $h(v) = 3v/r$.]

Quando tivermos um tal sistema de coordenadas usaremos letras U, V, W para representar os conjuntos $U = x^{-1}(B(3))$, $V = x^{-1}(B(2))$, $W = x^{-1}(B(1))$.

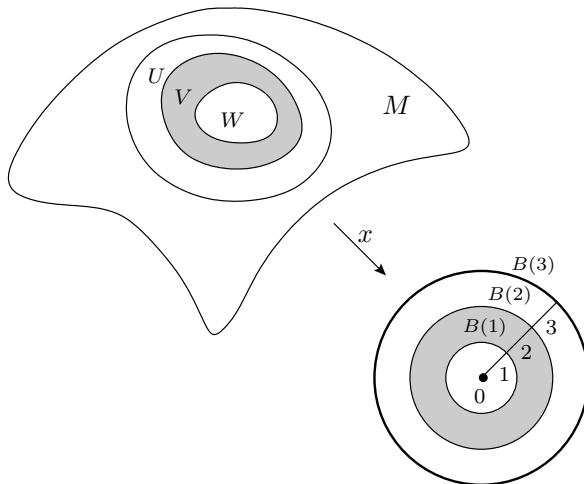



Figura 8.1.

A estes sistemas de coordenadas $x\colon U \to B(3)$ associaremos funções $\varphi_x\colon M \to \mathbb{R}$, de classe C^k, tais que:

a) $0 \leq \varphi_x(q) \leq 1$ para todo $q \in M$;

b) $\varphi_x(W) = 1, \quad \varphi_x(M - V) = 0.$

Uma função φ_x com as propriedades acima será chamada uma *função auxiliar* do sistema de coordenadas x.

Para se provar a existência de funções auxiliares basta exibir uma função $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, tal que

a') $0 \leq \varphi(y) \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$;

b') $\varphi(y) = 1$ para $|y| \leq 1, \quad \varphi(y) = 0$ para $|y| \geq 2.$

De fato, a função $\varphi_x\colon M \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi_x(q) = \begin{cases} \varphi(x(q)), & \text{se} \quad q \in U, \\ 0, & \text{se} \quad q \in M - V \end{cases}$$

será evidentemente uma função auxiliar.

Comecemos com a função $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\alpha(t) = \exp(-1/t)$ para $t > 0$, e $\alpha(t) = 0$ para $t \leq 0$.

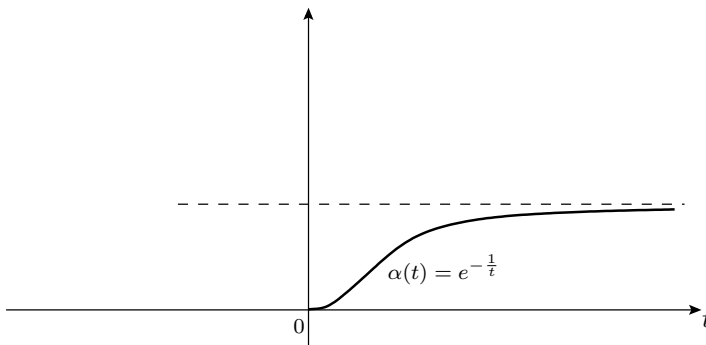



Figura 8.2.

Como α é claramente C^∞ em $\mathbb{R}-\{0\}$ e todas as suas derivadas tendem para 0 quando $t \to 0$, resulta que α é uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

Consideremos agora a função $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, definida por $\beta(t) = \alpha(t+2) \cdot \alpha(-t-1)$. Então $\beta(t) = \exp[(t+2)(t+1)]^{-1}$ para $-2 < t < -1$ e $\beta(t) = 0$ para os demais valores de t.

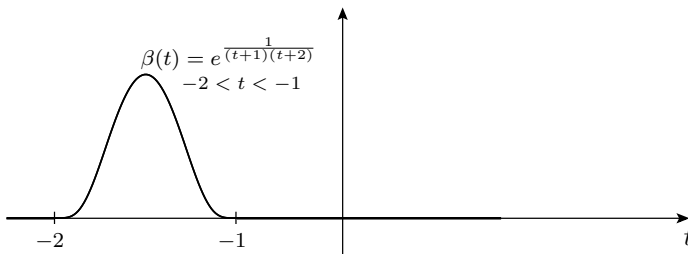



Figura 8.3.

Seja $b = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(s)\, ds = \int_{-2}^{-1} \beta(s)\, ds$. A integral indefinida

$$\gamma(t) = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(s)\, ds$$

é uma função de classe C^{∞} tal que $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ e $\gamma(t) = 1$ para $t \geq -1$. Além disso, γ cresce de 0 para 1 quando t varia de -2 a -1.

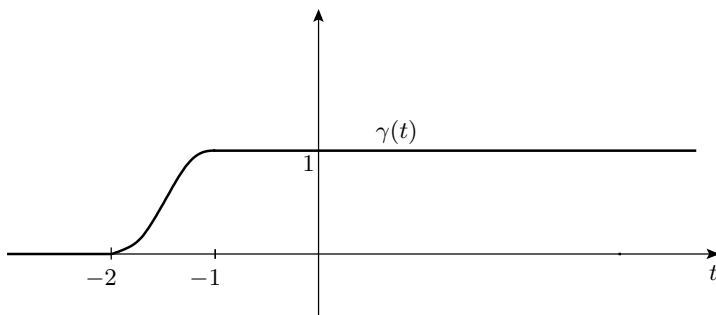



Figura 8.4.

Definamos finalmente $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = \gamma(-|x|)$

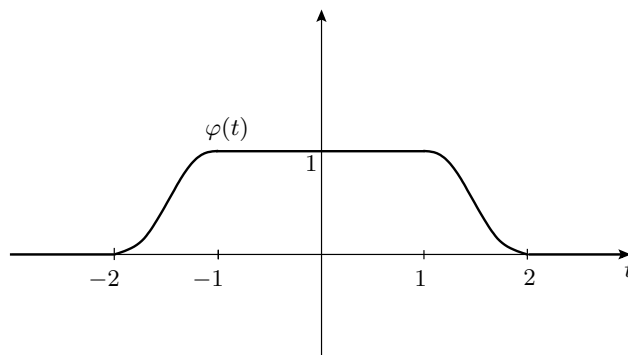



Figura 8.5.

A norma $|x|$ em $\mathbb{R}^m$ considerada acima deve provir de um produto interno,

$$|x| = \langle x, x\rangle^{1/2},$$

a fim de que $x \mapsto |x|$ seja uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}^m - \{0\}$. Como γ é constante perto de $x = 0$, resulta que $\varphi \in C^\infty$.

Mais geralmente, para cada número real $\varepsilon > 0$, existe uma função $\varphi_\varepsilon \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, tal que $0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1$ para todo x, $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ para $|x| \geq 2\varepsilon$. Basta tomar $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x/\varepsilon)$.

2 Algumas noções topológicas

Seja M uma variedade de classe C^k. As funções auxiliares serão usadas na Seção 3 para obter "partições da unidade" em M.

Recordemos primeiramente, nesta seção, alguns conceitos da Topologia Geral.

(I) Dados um espaço topológico X e uma aplicação $f \colon X \to \mathbb{R}^m$, o *suporte de* f é, por definição, o *fecho* do conjunto

$$\{x \in X; f(x) \neq 0\}.$$

Usaremos a notação $\operatorname{supp}(f)$ para indicar o suporte de f. Dado $x \in X$, dizer que $x \notin \operatorname{supp}(f)$ significa que f se anula em todos os pontos de uma vizinhança de x.

Exemplo. Usando as notações da Seção 1, vê-se que as funções auxiliares $\varphi_x \colon M \to \mathbb{R}$ têm como suporte os conjuntos

$$\overline{V} = \overline{x^{-1}(B(2))} = x^{-1}(\overline{B(2)}).$$

Observemos que existem funções auxiliares definidas em M com suportes arbitrariamente pequenos. Basta notar que dado

um sistema de coordenadas y em torno de um ponto $p \in M$, com $y(p) = 0$, as imagens inversas $y^{-1}(B(r))$ constituem uma *base de vizinhanças de* p, quando r percorre um intervalo $(0, \alpha)$.

(II) Uma família $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$ de subconjuntos de um espaço topológico X chama-se *localmente finita* quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de C_α's.

Mais precisamente, $\mathcal{C}$ é localmente finita se, e somente se, para cada $x \in X$ existem uma vizinhança $V \ni x$ e um subconjunto finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset A$ tais que

$$V \cap C_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}.$$

Exemplos

1) A família $\mathcal{C}$ que consiste de todos os intervalos de reta $(n, +\infty) \subset \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ é localmente finita.

2) Toda família finita é localmente finita. Uma família $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$ de subconjuntos de X diz-se *pontualmente finita* quando todo ponto $x \in X$ pertence somente a um número finito de C_α's. Toda família localmente finita é pontualmente finita. A recíproca é falsa: cada ponto $p \in \mathbb{R}$ pertence no máximo a um número finito de intervalos $(1/n, 2/n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ mas toda vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$ intersecta uma infinidade de tais intervalos.

Dada uma família localmente finita $\mathcal{C} = (C_\alpha)$ de subconjuntos de X, segue-se da definição de compacidade por cobertura abertas que um conjunto compacto $K \subset X$ só poderá intersectar um número finito de conjuntos C_α. Ou seja, dado $K \subset X$ compacto, existe um subconjunto finito $A_0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset A$ tal que $K \cap C_\alpha \neq \emptyset = \alpha \in A_0$. A demonstração é fácil e é deixada para o leitor. Em particular, dada uma família localmente finita $\mathcal{C} = (C_\alpha)$ num espaço compacto X, tem-se $C_\alpha = \emptyset$ salvo para um número finito de índices α.

Quando $(C_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma família localmente finita de subconjuntos de um espaço topológico X, tem-se $\overline{\bigcup C_\alpha} = \bigcup \overline{C}_\alpha$.

Toda variedade diferencáel é um espaço localmente compacto. Uma família $\mathcal{C} = (C_\alpha)$ de subconjuntos de um espaço localmente compacto X é localmente finita se, e somente se, cada conjunto compacto $K \subset X$ intersecta apenas um número finito de C_α's. Mais exatamente, dado K, deve existir $A_0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} \subset A$ tal que $C_\alpha \cap K \neq \emptyset$ implica $\alpha \in A_0$.

(III) Um espaço topológico com base enumerável goza da propriedade de Lindelöf: Toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura enumerável. Daí se conclui sem dificuldade que se X é um espaço topológico com base enumerável e $\mathcal{C} = (C_\alpha)$ é uma família localmente finita de subconjuntos de X, então $C_\alpha = \emptyset$ exceto para um subconjunto enumerável de α's. Esta é a situação que encontraremos nas variedades diferenciáveis.

(IV) Seja X um espaço topológico. Dada uma coleção $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de funções $\varphi_\alpha \colon X \to \mathbb{R}$, tais que a família $(\operatorname{supp}(\varphi_\alpha))_{\alpha\in A}$ dos seus suportes é pontulamente finita, então a soma

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha$$

tem sentido. De fato, para cada $x \in X$ existe um conjunto finito de índices $A_0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset A$ tal que $\varphi_\alpha(x) = 0$ se $\alpha \notin A_0$. Definimos então $\varphi(x) = \varphi_{\alpha_1}(x) + \cdots + \varphi_{\alpha_r}(x)$.

Se $(\operatorname{supp}(\varphi_\alpha))_{\alpha\in A}$ é localmente finita e as φ_α são contínuas então φ é contínua. Com efeito, para cada $x_0 \in X$ existem uma vizinhança $V \ni x_0$ e índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ em A tais que $\varphi(x) = \varphi_{\alpha_1}(x) + \cdots + \varphi_{\alpha_r}(x)$ *para todo* $x \in V$.

3 Partições da unidade

Sejam M uma variedade de classe C^r e $\varphi = \sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha$ a soma de uma família $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de funções de classe C^k em M cujos suportes formam uma família localmente finita. Cada $p \in M$ possui uma vizinhança V_p tal que $\varphi(q) = \varphi_{\alpha_1}(q) + \cdots + \varphi_{\alpha_r}(q)$, para todo $q \in V_p$. [Os índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ são os mesmos para todos os pontos $q \in V_p$.] Isto mostra que $\varphi = \sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha$ é de classe C^k, por ser localmente uma soma finita de funções de classe C^k. Além disso, sendo M um espaço topológico com base enumerável, necessariamente $\varphi_\alpha \equiv 0$ salvo para uma quantidade enumerável de índices α.

Definição. Seja M uma variedade de classe C^r. Uma *partição da unidade* de classe C^k $(k \leq r)$ em M é uma família de funções $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$, de classe C^k, tais que

1) Para todos os $p \in M$ e $\alpha \in A$, $\varphi_\alpha(p) \geq 0$;
2) A família $\mathcal{C} = (\mathrm{supp}(\varphi_\alpha))_{\alpha\in A}$ é localmente finita em M;
3) Para todo $p \in M$ tem-se $\sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(p) = 1$.

Em vista de 2), a soma em 3) é finita em cada ponto $p \in M$. Tem-se também $0 \leq \varphi_\alpha(p) \leq 1$ por causa de 3) e de 1).

A definição acima inclui o caso de partições da unidade finitas, $\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1$. É suficiente tomar $\varphi_\alpha \equiv 0$ salvo para um número finito de índices α. É claro que toda partição da unidade em uma variedade compacta é finita (ver Seção 2, Observação 2).

Seja $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma cobertura de M. Dizemos que uma partição da unidade $\sum_{\beta\in B} \varphi_\beta = 1$ está *subordinada* à cobertura $\mathcal{C}$ se, para todo $\beta \in B$, existe $\alpha \in A$ tal que $\mathrm{supp}(\varphi_\beta) \subset C_\alpha$.

Intuitivamente, a cobertura $\mathcal{C}$ é uma medida do tamanho dos suportes das funções φ_β, no seguinte sentido:

Dadas duas coberturas $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ de um conjunto X, dizemos que $\mathcal{C}$ é *mais fina* que $\mathcal{C}'$, ou $\mathcal{C}$ *refina* $\mathcal{C}'$, ou $\mathcal{C}$ é um *refinamento* de $\mathcal{C}'$ quando, para todo $C \in \mathcal{C}$, existe algum $C' \in \mathcal{C}'$ tal que $C \subset C'$.

Por exemplo, uma partição da unidade $\Sigma\,\varphi_\beta = 1$ está subordinada à uma cobertura $\mathcal{C} = (C_\alpha)$ se, e somente se, os suportes das funções φ_β formam uma cobertura que refina $\mathcal{C}$.

A relação "$\mathcal{C}$ é mais fina que $\mathcal{C}'$" é reflexiva e transitiva mas não é anti-simétrica.

Dizemos que uma partição da unidade $\sum\limits_{\alpha\in A} \varphi_\alpha = 1$ é *estritamente subordinada* a uma cobertura $\mathcal{C}$ quando $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha\in A}$ tem índices no mesmo conjunto que as funções φ_α e, além disso, $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha) \subset C_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.

Proposição 1. *Sejam M uma variedade diferenciável e $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de M. Então $\mathcal{C}$ possui uma refinamento $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\}$ localmente finito, formado por domínios de sistemas de coordenadas $x_i \colon U_i \to \mathbb{R}^m$ tais que $x_i(U_i) = B(3)$ para todo i. Além disso, pondo $V_i = x_i^{-1}(B(2))$ e $W_i = x_i^{-1}(B(1))$, os W_i's ainda constituem uma cobertura (localmente finita) de M.*

Demonstração: Sendo um espaço de Hausdorff localmente compacto, com base enumerável, M pode ser escrito como reunião enumerável $M = \bigcup K_i$ de compactos tais que $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots$

O compacto K_2 pode ser coberto com um número finito de conjuntos aberto do tipo W cujos U's correspondentes estão contidos no interior de K_3 e em algum aberto da cobertura $\mathcal{C}$. Analogamente, a "faixa" compacta $K_3 - \operatorname{int} K_2$ pode ser coberta por um número finito de conjuntos do tipo W tais que cada um dos U's correspondentes está contido em $K_4 - K_1$ e em algum conjunto aberto $C \in \mathcal{C}$.

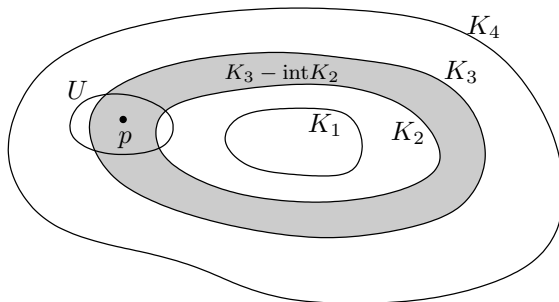



Figura 8.6.

Fazendo o mesmo raciocínio para $K_4 - \mathrm{int}\, K_3$, $K_r = \mathrm{int}\, K_4$, etc., obtemos uma cobertura enumerável $\{W_1, W_2, \ldots\}$ de M e, correspondentemente, uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n, \ldots\}$.

A cobertura $\mathcal{U}$ refina $\mathcal{C}$, por construção, e é localmente finita de uma maneira especial pois cada U_i, estando contido em algum K_j, intersecta apenas um número finito dos outros U's.

Observação: Quando M é compacta, a Proposição 1 é trivial. A cobertura $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ é finita, obtida imediatamente da definição de compacidade por cobertura de abertos.

Corolário. *Dada uma cobertura aberta $\mathcal{C}=(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ de uma variedade $M \in C^k$, existe uma partição da unidade $\sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_i = 1$, de classe C^k, subordinada à cobertura $\mathcal{C}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots\}$ a cobertura de M obtida na demonstração da Proposição 1. Consideremos a família de funções auxiliares $\varphi_{x_i} \colon M \to \mathbb{R}$, de classe C^k, associadas aos sistemas de cordenadas $x_i \colon U_i \to \mathbb{R}^m$. A soma $\varphi = \sum_i \varphi_{x_i}$ será bem definida pois $\mathcal{U}$ é localmente finita. Pondo $\psi_i = \varphi_{x_i}/\varphi$ então $\Sigma\, \psi_i = 1$ e obtemos a desejada partição da unidade.

Teorema 1. *Dada uma cobertura aberta $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$ de uma variedade M de classe C^k, existe uma partição da unidade $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha =$*

1*, de classe C^k, estritamente subordinada à cobertura $\mathcal{C}$.*

Demonstração: Seja $\sum_{i\in\mathbb{N}} \psi_i = 1$ partição da unidade subordinada a $\mathcal{C}$, obtida pelo corolário anterior. Assim, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $\alpha \in A$ tal que $U_i \subset C_\alpha$. Tomemos uma "função de escolha" $f\colon \mathbb{N} \to A$, isto é, $U_i \subset C_{f(i)}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Ponhamos $\psi_\alpha = \sum_{f(i)=\alpha} \psi_i$. Como $\mathcal{U}$ é localmente finita, tem-se

$$\overline{\bigcup_{f(i)=\alpha} V_i} = \bigcup_{f(i)=\alpha} \overline{V}_i\,.$$

Logo $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) = \bigcup_{f(i)=\alpha} \overline{V}_i\,.$

Afirmamos que $(\operatorname{supp}(\psi_\alpha))_{\alpha\in A}$ é uma família localmente finita. De fato, como $\mathcal{U}$ é localmente finita, dado $p \in M$ existem $V \ni p$ e $J = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \mathbb{N}$ tais que

$$U_i \cap V \neq \emptyset \Rightarrow i \in J.$$

Seja $A_0 = f(J)$. Se $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ então $\overline{U}_i \cap V \neq \emptyset$ para algum i tal que $f(i) = \alpha$. Então $U_i \cap V \neq \emptyset$. Segue-se que $i \in J$, e portanto $\alpha = f(i) \in A_0$. Em suma, $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \in A_0$. Conseqüentemente $(\operatorname{supp}(\psi_\alpha))$ é localmente finita. A demonstração fica concluída pondo

$$\psi = \sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha \quad \text{e} \quad \varphi_\alpha = \psi_\alpha/\psi.$$

Então $\Sigma\,\varphi_\alpha = 1$ e $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha) \subset C_\alpha\,.$

4 O lema de Urysohn diferenciável

Seja M uma variedade diferenciável, de classe C^k. Uma partição da unidade de classe C^k subtordinada a uma cobertura $M = U \cup V$,

formada por dois abertos, consiste de duas funções de classe C^k, $\varphi, \psi \colon M \to \mathbb{R}$, tais que $\varphi, \psi \geq 0$, $\varphi + \psi = 1$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$ e $\operatorname{supp}(\psi) \subset V$. Isto nos leva à

Aplicação 1 (Lema de Urysohn diferenciável). *Sejam F, G dois subconjuntos não vazios, fechados e disjuntos, de uma variedade $M \in C^k$. Existe uma função $f \colon M \to \mathbb{R}$ de classe C^k, tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(F) = 0$ e $f(G) = 1$.*

Demonstração: Como $F \cap G = \emptyset$, temos uma cobertura aberta $M = (M - f) \cup (M - G)$. Seja $f + g = 1$ uma partição da unidade de classe C^k tal que $\operatorname{supp}(f) \subset M - F$ e $\operatorname{supp}(g) \subset M - g$. A função $f \colon M \to \mathbb{R}$ cumpre as condições requeridas.

Como aplicação do lema de Urysohn diferenciável, mostremos que, dado um subconjunto fechado F de uma variedade diferenciável $M \in C^k$, existe uma função $f \colon M \to \mathbb{R}$ de classe C^k que se anula precisamente nos pontos de F.

Aplicação 2. *Seja F um subconjunto fechado de uma variedade M de classe C^k. Então existe uma função $f \colon M \to \mathbb{R}$, de classe C^k, tal que $F = f^{-1}(0)$.*

Demonstração: Primeiro caso: $F = K$ é compacto e $M = \mathbb{R}^m$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja $V_i = \left\{x \in \mathbb{R}^m; d(x, K) < \dfrac{1}{i}\right\}$.

Então todos os V_i's são abertos, $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ e $K = \bigcap V_i$. Pela Aplicação 1 existe, para cada i, uma função de classe C^∞, $f_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, tal que $0 \leq f_i \leq 1$, $f_i(K) = 0$ e $f_i(\mathbb{R}^m - V_i) = 1$.

As funções f_i podem anular-se em pontos de V_i que não estão em K. Mas se encontrarmos constantes $\alpha_i > 0$ tais que $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ seja uma função de classe C^∞, então f vai anular-se somente nos pontos de K. Realmente, $x \notin K$ implica $x \in \mathbb{R}^m - V_i$ para algum i, logo $f_i(x) = 1$, donde $f(x) \neq 0$.

Encontremos agora tais constantes $c_i > 0$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, f_i é constante fora do compacto $\overline{V}_i$. Sendo assim, todas as derivadas $f_i^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, são funções contínuas com suporte compacto e, por conseguinte, são limitadas. Ou seja, para cada $i = 1, 2, \ldots$ e para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$, e para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$ existe uma constante $M_{ij} > 0$ tal que $|f_i^{(j)}(x)| < M_{ij}$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. [Aqui $f_i^{(0)} = f_i$ e $M_{i0} = 1$ para todo i].

Escolhamos números reais α_{ij} tais que $0 < \alpha_{ij} \leq \dfrac{1}{2^i M_{ij}}$ e $\alpha_{i,j+1} \leq \alpha_{ij}$ para todo $i = 1, 2, \ldots$ e $j = 0, 1, 2, \ldots$ Isto pode ser feito tomando $\alpha_{i0} = \dfrac{1}{2^i}$ e, após escolhermos $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{i,j}, \ldots$, pondo $\alpha_{i,j+1} = \min\left\{\alpha_{i,j}, \dfrac{1}{2^i M_{i,j+1}}\right\}$.

Então, para cada $j \geq 0$ fixo, a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_{kj} f_i^{(j)}$ é dominada por $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^i}$, e portanto converge absoluta e uniformemente em $\mathbb{R}^m$.

Consideremos a "diagonal" $\alpha_i = \alpha_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots$. Nota-se que $i > j = c_i \leq \alpha_{ij}$. Logo $\sum\limits_i c_i f_i$, bem como todas as séries $\sum\limits_i c_i f_i^{(j)}$, convergem uniformemente no $\mathbb{R}^m$.

Resulta daí (*) que $f = \Sigma\, c_i f_i$ é uma função de classe C^∞, com $f^{(j)} = \Sigma\, c_i f_i^{(j)}$. Isto conclui a demonstração do primeiro caso.

Observação: A função que acabamos de construir é constante (igual a $\Sigma\, c_i$) fora da vizinhança $V_1 \supset K$.

Tomando $f/\Sigma\, c_i$ ao invés de f, podemos sempre supor que $f = 1$ fora de uma dada vizinhança de K.

Segundo caso (geral): Seja $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)$ uma cobertura localmente finita de M, formada por domínios de sistemas de coordenadas $U_i = x_i^{-1}(B(3))$. Ponhamos $V_i = x_i^{-1}(B(2))$ e $W_i = x_i^{-1}(B(1))$.

(*) Vide AER^n, Capítulo VI, Prop.7.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $K_i = \overline{W}_i \cap F$. Então K_i é um subconjunto compacto de V_i e $F = \bigcup K_i$. Usando o difeomorfismo $x_i \colon U_i \to B(3)$ obtemos, pelo primeiro caso, uma função de classe C^k $f_i \colon M \to \mathbb{R}$ tal que $f_i(M - v_i) = 1$ e $f_i^{-1}(0) = K_i$.

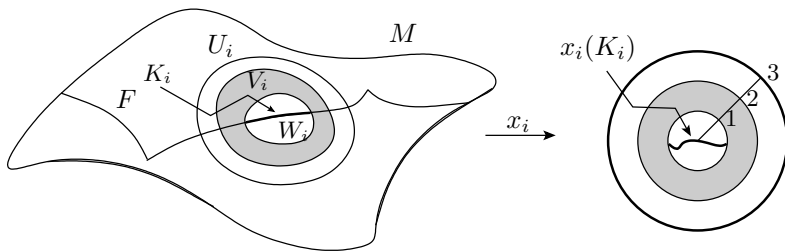



Figura 8.7.

Definimos $f \colon M \to \mathbb{R}$ pondo $f(p) = f_1(p) \cdot f_2(p) \cdot f_3(p) \ldots$. Cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança V que interesecta apenas um número finito de conjuntos $U_{i_1}, \ldots, U_{i_s}$. Então $f = f_{i_1} \cdot f_{i_2} \cdots f_{i_s}$ em V pois nesta vizinhança as outras f_i's são identicamente 1. Além disso, $f(p) = 0 \Leftrightarrow f_i(p) = 0$ para algum $i \Leftrightarrow p \in K_i$ para algum $i \Leftrightarrow p \in F$. Isto conclui a demonstração.

5 Aplicações diferenciáveis em subconjuntos arbitrários de variedades

Sejam M, N variedades de classe C^k, pelo menos, e $X \subset M$ um subconjunto arbitrário. Uma aplicação $f \colon X \to N$ diz-se *de classe* C^k se, para cada ponto $p \in X$, existe uma aplicação $f_p \colon V_p \to N$, de classe C^k, definida numa vizinhança aberta $V_p \subset M$ de p, tal que $f_p = f$ em $V_o \cap X$.

Exemplos

1) Se $V \subset M$ é um subconjunto aberto e $f \colon V \to N$ é uma aplicação de classe C^k, então $f|X \colon X \to N$ é de classe C^k para

todo subconjunto $X \subset V$. Em particular, a aplicação de inclusão $i\colon X \to M$ é de classe C^k.

2) No caso em que $X \subset M$ é uma subvariedade de classe C^k, tem-se duas definições para o conceito "$f\colon X \to N$ é de classe C^k". A primeira é a da Seção 1, Cap. V, considerando-se X como uma variedade diferenciável. Na segunda definição, olhamos para X simplesmente como um subconjunto de M. Devemos mostrar que estas definições são equivalentes.

Pela Proposição 4, Seção 3, Cap. VI, para cada ponto $p \in X$ existe uma vizinhança $p \in V_p \subset M$ e um difeomorfismo

$$x\colon V_p \to U \times W \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$$

$(m = \dim M,\ s = \dim X)$ de classe C^k tal que $x(V_p \cap X) = u \times \{0\}$.

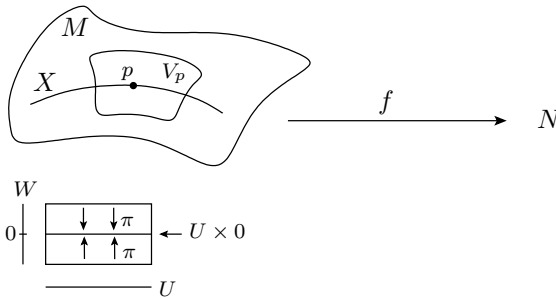



Figura 8.8.

Se $f\colon X \to N$ é de classe C^k no sentido da Seção 1, Cap. V então definimos $f_p\colon V_p \to N$ por $f_p = f \circ x^{-1} \circ \pi \circ x$, onde $\pi\colon U \times W \to U \times 0$ é a primeira projeção. Como $\pi(x(q)) = x(q)$ para todo $q \in X \cap V_p$, temos $f_p|(X \cap V_p) = f|(X \cap V_0)$ e é claro que f_p é de classe C^k na vizinhança aberta $V_p \subset M$. Logo $f \in C^k$ no sentido da definição recente.

Reciprocamente, suponhamos que, para cada $p \in X$, exista uma aplicação de classe C^k, $f_p\colon V_p \to N$, definida na vizinhança V_p de p e coincidindo com f em $V_p \cap X$. Como a inclusão $i\colon X \cap V_p \to V_p$ é de classe C^k, vê-se que $f = f_p \circ i\colon X \cap V_p \to N$ é de classe C^k. Logo $f \in C^k$ como aplicação entre variedades.

Mostraremos agora que toda aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k num subconjunto $X \subset M$, é a restrição de uma aplicação $g\colon V \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k, definida numa vizinhança aberta V do subconjunto X. Mais tarde iremos generalizar este resultado, considerando aplicações $f\colon X \to N$, onde N é uma variedade diferenciável. Em outras palavras, o Exemplo 1 é o mais geral possível.

Antes, porém, demonstremos o

Lema. *Seja U um subconjunto aberto de uma variedade diferenciável $M \in C^r$. Sejam $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k $(k \leq r)$ e $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k cujo suporte está contido em U. Então a aplicação $\lambda\colon M \to \mathbb{R}^n$, definida por $\lambda(p) = \varphi(p)f(p)$ se $p \in U$ e $f(p) = 0$ se $p \in M - U$, é de classe C^k.*

Demonstração: É evidente que λ é de classe C^k em U. Além disso λ é de classe C^k em $M - \operatorname{supp}(\varphi)$, visto que é identicamente zero neste conjunto. Ora, uma aplicação diferenciável em dois abertos é diferenciável na reunião destes. Logo $\lambda \in C^k$ em $M = U \cup (M - \operatorname{supp}(\varphi))$.

Por abuso de notação, escrevemos $\varphi(p) \cdot f(p)$ em vez de $\lambda(p)$, mesmo quando $p \notin U$.

Este lema justifica a definição de suporte como sendo o *fecho* e não apenas o conjunto dos pontos onde a função não se anula.

Aplicação 3. *Seja M uma variedade de classe C^r. Dada uma aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k $(k \leq r)$ definida num subconjunto $X \subset M$, existe uma aplicação $g\colon V \to \mathbb{R}^n$, definida numa vizinhança aberta $V \subset M$ de X, tal que $g|X = f$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de X por abertos de M tais que, para cada $U \in \mathcal{U}$, existe uma aplicação $f_U\colon U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k, que coincide com f em $U \cap X$. A reunião dos conjuntos $U \in \mathcal{U}$ é uma sub-variedade aberta $V \subset M$. Seja $\sum\limits_{U \in \mathcal{U}} \varphi_U = 1$ uma partição da unidade de classe C^k, estritamente subordinada à cobertura $\mathcal{U}$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, a aplicação $\lambda_U = \varphi_U f_U$ é de classe C^k (vide lema anterior) e a família $(\operatorname{supp} \lambda_U)_{U \in \mathcal{U}}$ é localmente finita. Logo, $g = \sum\limits_{U \in \mathcal{U}} \lambda_U$ é de classe C^k em V. Quando $p \in X$, $g(p) = \sum\limits_U \varphi_U(p) f_U(p) = \sum\limits_U \varphi_U(p) f(p) = f(p)$, pois podemos, na soma, desprezar as parcelas $\varphi_U(p) \cdot f_U(p)$ com $p \notin U$. Isto conclui a demonstração.

Quando $X \subset M$ é um subconjunto fechado, a Aplicação 3 pode ser consideravelmente melhorada, como se segue:

Aplicação 4 (Teorema de Tietze diferenciável). *Seja X um subconjunto fechado de uma variedade $M \in C^r$. Toda aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k $(k \leq r)$, pode ser estendida a uma aplicação $h\colon M \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k, definida em toda a variedade.*

Demonstração: Pela Aplicação 3, existe uma aplicação $g\colon V \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k, que estende f a uma vizinhança V do subconjunto fechado X.

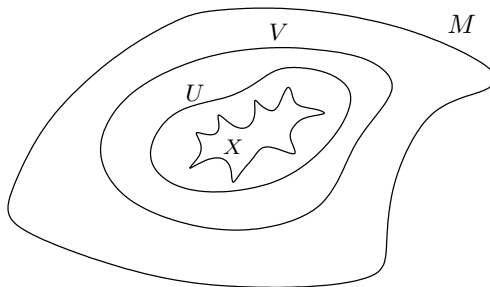



Figura 8.9.

Consideremos um conjunto aberto U tal que $X \subset U \subset \overline{U} \subset V$. Isto pode ser feito pois M é um espaço topológico normal (*). Seja $\lambda\colon M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k tal que $\lambda(X) = 1$, $\lambda(M - U) = 0$ (cf. Aplicação 1). Então $h\colon M \to \mathbb{R}^n$, definida por $h(p) = \lambda(p) \cdot g(p)$ se $p \in V$ e $h(p) = 0$ se $p \in M - V$, é de classe C^k e coincide com f em X.

Observações finais

1) A Aplicação 3 continua verdadeira se substituimos $\mathbb{R}^n$ por qualquer variedade $N \in C^k$. (Este resultado mais forte será provado no Capítulo , quando faremos uso dos instrumentos adequados: mergulho em $\mathbb{R}^n$ e vizinhança tubular).

2) Por outro lado, a Aplicação 4 não é válida para aplicações que tomam valores numa variedade arbitrária. Por exemplo, a identidade $i\colon S^1 \to S^1$ não pode ser estendida a uma aplicação $F\colon \mathbb{R}^2 \to S^1$, de classe C^2. Com efeito, suponhamos por absurdo que isto pudesse ocorrer.

Escrevamos $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Como $F|S^1 = \text{id}$, tem-se

$$f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \cos t, \quad g(\cos t, \operatorname{sen} t) = \operatorname{sen} t,$$

(*) Vide ETG, pag. 235.

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, se escrevermos

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \quad \text{e} \quad dg = \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy,$$

a integral curvilínea abaixo é calculada imediatamente:

$$\begin{aligned} I &= \int_{S^1} f\,dg - g\,df = \int_{S^1} \cos t \cdot (\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen} t \cdot d(\cos t) \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\,dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Por outro lado, como S^1 é o bordo do disco D^2, o Teorema de Green fornece:

$$\begin{aligned} I &= \int_{S^I} \left(f\,\frac{\partial g}{\partial x} - g\,\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(f\,\frac{\partial g}{\partial y} - g\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy \\ &= \iint_{D^2} 2\left[\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial g}{\partial x}\right] dxdy. \end{aligned}$$

Ora, a expressão dentro dos colchetes na integral dupla acima é identicamente nula, pois é o determinante cujas colunas são os vetores $\dfrac{\partial F}{\partial x} = F'(x,y)\cdot e_1$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = F'(x,y)\cdot e_2$, os quais são colineares por serem tangentes a S^1 no mesmo ponto $F(x,y)$. Assim $I = 0$, uma contradição.

Capítulo IX

Métricas Riemannianas

1 Variedades riemannianas

Uma *métrica riemanniana* numa variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno no espaço tangente TM_p.

Seja g uma métrica riemanniana em M. Indicamos com $g_p(u,v)$ ou $g(p;u,v)$ o produto interno dos vetores $u,v \in TM_p$. Quando não há perigo de confusão usamos a notação $\langle u,v \rangle_p$ ou simplesmente $\langle u,v \rangle$.

O *comprimento* ou *norma* do vetor tangente $u \in TM_p$ é definido da maneira óbvia por

$$|u| = |u|_p = \sqrt{g(p;u,u)}.$$

Uma variedade diferenciáel onde está definida uma métrica riemanniana chama-se uma *variedade riemanniana*. Em termos mais precisos, trata-se de um par (M,g) onde g é uma métrica riemanniana na variedade M.

Uma métrica riemanniana em que os produtos internos nos diversos espaços tangentes não estão relacionados entre si não tem

interesse. É desejável que o produto interno dependa pelo menos continuamente do ponto $p \in M$, num sentido que faremos preciso a seguir.

A cada sistema de coordenadas em M, $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ associamos a função

$$g^x\colon x(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

definida por $g^x(x(p); a, b) = \langle x'(p)^{-1} \cdot a, x'(p)^{-1} \cdot b\rangle_p$. Notemos que, para cada $p \in U$, tem-se um produto interno em $\mathbb{R}^m$, dado por

$$(a, b) \mapsto g^x(x(p); a, b).$$

Consideremos também as funções

$$g^x_{ij}\colon U \to \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

definidas por $g^x_{ij}(p) = g^x(x(p); e_i, e_j) = \langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}(p), \dfrac{\partial}{\partial x^j}(p)\rangle_p$.

Se $a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$ e $b = (\beta^1, \ldots, \beta^m)$ são vetores em $\mathbb{R}^m$, então $u = x'(p)^{-1} \cdot a = \sum_i \alpha^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}(p)$ e $v = (x'(p)^{-1} \cdot b = \sum_j \beta^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}(p)$, logo $g^x(x(p); a, b) = g(p; u, v) = \sum_{i,j} g^x_{ij}(p)\alpha^i\beta^j$.

Definição. Diz-se que a métrica riemanniana g em M *é de classe* C^k se, para cada sistema de coordenadas x em M, a função $g^x\colon x(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é de classe C^r ou, equivalentemente, se as funções $g^x_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ são de classe C^r.

Exemplos

1) A métrica euclidiana. Sejam $M = \mathbb{R}^m$ e $g(p,u,v) = \langle u,v\rangle = \sum_i u^i v^i$ para $u,v \in T(\mathbb{R}^m)_p \equiv \mathbb{R}^m$.

2) Toda superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^k possui uma métrica riemanniana natural, de classe C^{k-1}. Basta considerar, em cada espaço tangente $TM_p \subset \mathbb{R}^n$, o produto interno induzido de $\mathbb{R}^n$. Com efeito, dado um sistema de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ em M, sua inversa $\varphi = x^{-1}\colon x(U) \to U \subset \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de classe C^k. Conseqüentemente, a função $g^x\colon x(U)\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, dada por $g^x(x(p);u,v) = \langle \varphi'(x(p))\cdot u, \varphi'(x(p))\cdot v\rangle$, é de classe C^{k-1}. Observemos que

$$g^x_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(x(p)), \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}(x(p))\right\rangle.$$

3) Seja $f\colon M \to N$ uma imersão de classe C^k. Dada uma métrica riemanniana $h \in C^r$ em N, definimos uma métrica riemanniana g em M pondo

$$g(p;u,v) = h(f(p); f'(p)\cdot u, f'(p)\cdot v)$$

ou seja, $\langle u,v\rangle_p = \langle f'(p)\cdot u, f'(p)\cdot v\rangle_{f(p)}$.

Diz-se que a métrica riemanniana g é *induzida* pela imersão f. É fácil de ver que $\langle u,v\rangle_p$ é de fato um produto interno em TM_p e que, além disso, $h \in C^r$ implica $g \in C^s$, $s = \min\{k-1, r\}$.

No exemplo anterior, a métrica riemanniana natural em uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é induzida pela aplicação de inclusão $i\colon M \to \mathbb{R}^n$.

A definição de métrica riemanniana de classe C^r pode ser formulada mais elegantemente, em termos de métricas induzidas. Se g é uma métrica riemanniana numa variedade M e $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ é um sistema de coordenadas em M, então g^x é a métrica induzida

em $x(U)$ pela imersão $x^{-1}\colon x(U) \to M$. Dizemos que $g \in C^r$ se $g^x\colon x(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é de classe C^r para todo sistema de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$. Sejam $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ e $y\colon V \to \mathbb{R}^m$ sistemas de coordenadas numa variedade M, de classe C^k, munida de uma métrica riemanniana g. Suponhamos $U \cap V \neq \emptyset$. Nas exposições clássicas de Análise Tensorial desempenham um papel proeminente as fórmulas que relacionam as funções $g^x_{ij}\colon U \cap V \to \mathbb{R}$ com as funções $g^y_{ij}\colon U \cap V \to \mathbb{R}$. Vamos apresentá-las, como uma homenagem à tradição.

Para cada ponto $q \in U \cap V$, seja $(\partial x^\alpha / \partial y^i)$ a matriz jacobiana de $x \circ y^{-1}$ no ponto $y(q)$.
Então $\dfrac{\partial}{\partial y^i}(q) = \sum\limits_{\alpha=1}^{m} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}(q)$. Segue-se que:

$$\begin{aligned} g^x_{ij}(q) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\rangle_q = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right\rangle_q \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\, g^x_{\alpha\beta}(q). \end{aligned}$$

Note-se que isto exibe g^y_{ij} como função de classe C^{k-1} das $g^x_{\alpha\beta}$; assim não se pode esperar obter uma métrica riemanniana de classe C^k numa variedade de classe C^k.

Estudaremos agora as métricas riemannianas que se podem definir num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Lembremos que uma transformação linear $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ chama-se *positiva definida* quando é simétrica (isto é $\langle G \cdot u, v\rangle = \langle u, G \cdot v\rangle$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^m$) e, além disso $\langle G \cdot u, u\rangle > 0$ para todo $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^m$.

Seja $G\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ uma aplicação de classe C^k, tal que $G(p)$ é positiva definida, para todo $p \in U$. Definiremos uma métrica riemanniana g, de classe C^k em U, pondo

$$(*) \qquad g(p; u, v) = \langle G(p) \cdot u, v\rangle, \;\; p \in U, \;\; u, v \in \mathbb{R}^m.$$

Reciprocamente, dada a métrica $g \in C^k$ em U, reobtemos G do seguinte modo. Para $p \in U$ fixo, cada vetor $u \in \mathbb{R}^m$ define um funcional linear $v \mapsto g(p; u, v)$ em $\mathbb{R}^m$. A este funcional corresponde um único vetor $G(p) \cdot u$ tal que a equação (*) acima se verifica. Evidentemente $u \mapsto G(p) \cdot u$ é linear e a matriz de $G(p)$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^m$ é $(g_{ij}(p)) = (g(p; e_i, e_j))$, de modo que $G \colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ assim definida, é de classe C^k.

Quando não houver perigo de confusão, escreveremos $\langle u, v \rangle_p$ e $|u|_p$, em vez de $g(p; u, v)$ e $\sqrt{g(p; u, u)}$, respectivamente, para indicar o produto interno e a norma de vetores $u, v \in (TU)_p$, relativamente à métrica riemanniana g. Note-se que TU_p difere de $\mathbb{R}^m$ apenas porque o produto interno pode ser diferente. As notações $\langle u, v \rangle$ e $|u|$ indicarão o produto interno e a norma usuais do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$.

Lema. *Sejam $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ formado pelas transformações lineares simétricas e $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ o subconjunto de $\mathcal{S}$ formado pelas transformações positivas definidas. Então $\mathcal{P}$ é um subconjunto aberto convexo de $\mathcal{S}$ e a aplicação $f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{S}$, definida por $f(P) = P^2$, é um difeomorfismo C^∞ de $\mathcal{P}$ sobre si mesmo.*

Demonstração: Sabe-se da Álgebra Linear que todo operador positivo definido tem uma única raiz quadrada positiva; logo f é uma bijeção de $\mathcal{P}$ sobre si mesmo. Deixamos para o leitor o trabalho de provar que $\mathcal{P}$ é aberto em $\mathcal{S}$ e convexo. Resta então mostrar que, para cada $P \in \mathcal{P}$, a derivada $f'(P) \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, dada por $f'(P) \cdot H = PH + HP$, é injetiva (e portanto um isomorfismo). Sabemos que os autovalores de P são todos positivos e que $\mathbb{R}^m$ possui uma base ortonormal formada por autovetores de P. Então, se $PH + HP = 0$, para cada um desses autovetores $u \in \mathbb{R}^m$, com $P \cdot u = \lambda \cdot u$, $\lambda > 0$, teremos $P(H \cdot u) = -H(Pu) = -H(\lambda \cdot u) = -\lambda(H \cdot u)$. Como P não pode admitir o autovalor negativo $-\lambda$,

devemos ter $H \cdot u = 0$ para todos os elementos de uma base de $\mathbb{R}^m$, donde $H = 0$. O lema está demonstrado.

Dado $P \in \mathcal{P}$, escreveremos $\sqrt{P} = f^{-1}(P) \in \mathcal{P}$.

Proposição 1. *Seja $g\colon U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma métrica riemanniana de classe C^k num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Existe uma aplicação $\Gamma\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, de classe C^k, tal que, para cada $p \in U$, o operador $\Gamma(p)$ é positivo e $|v|_p = |\Gamma(p) \cdot v|$, $v \in \mathbb{R}^m$. Em outras palavras, a norma de $v \in TU_p$, dada pela métrica riemanniana g é igual à norma euclidiana usual do vetor $\Gamma(p) \cdot v$.*

Demonstração: Seja $G\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ definida por $g(p; u, v) = \langle G(p) \cdot u, v\rangle$. Usando o Lema, seja $\Gamma(p) = \sqrt{G(p)}$. Então, para quaisquer $v \in \mathbb{R}^m$ e $p \in U$, temos:

$$|v|_p = \langle \Gamma(p)^2 \cdot v, v\rangle^{1/2} = \langle \Gamma(p) \cdot v, \Gamma(p) \cdot v\rangle^{1/2} = |\Gamma(p) \cdot v|.$$

Isto conclui nosso estudo local das métricas riemannianas. Em seguida, provaremos a existência global de uma métrica riemanniana em qualquer variedade.

Proposição 2. *É possível definir uma métrica riemanniana de clase C^{k-1} em qualquer variedade $M \in C^k$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U} = (U_i)$ uma cobertura localmente finita de M por domínios de sistemas de coordenads $x_i\colon U_i \to \mathbb{R}^m$ com $x_i(U_i) = B(3)$, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$. Seja $\varphi_i\colon M \to \mathbb{R}$ uma função auxiliar de classe C^k, associada ao sistema x_i. (Vide Seção 1, Cap. VIII.) Em cada vizinhança coordenada $U_i \subset M$ uma métrica riemanniana $g_i \in C^{k-1}$ é induzida do $\mathbb{R}^m$ pondo

$$g_i(p; u, v) = \langle x_i'(p) \cdot u, x_i'(p) \cdot v\rangle.$$

Obtemos uma métrica riemanniana g em M pondo

$$g(p; u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(p) \cdot g_i(p; u, v).$$

[Como sempre, entendemos que $\varphi_i(p) \cdot g_i(p; u, v) = 0$ se $p \notin U_i$]. Os detalhes podem ser verificados facilmente. Por exemplo, se $u \neq 0$ é um elemento de TM_p, então

$$g(p; u, u) = \sum_i \varphi_i(p) \cdot g_i(p; u, u) > 0,$$

pois $\varphi_i(p) > 0$ e $g_i(p; u, u) > 0$ para todo i tal que $p \in V_i$.

2 A norma da derivada

Inicialmente recordaremos alguns fatos sobre normas em espaços de aplicações lineares.

Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita, dotados de produtos internos, os quais indicaremos com o mesmo símbolo $\langle u, v \rangle$, enquanto $|u|$ representará uma das normas induzidas por eles.

Quando definimos a norma de uma transformação linear $T\colon E \to F$ como $|T| = \sup\{|T \cdot u|; u \in E, |u| = 1\}$, tornamos $\mathcal{L}(E; F)$ um espaço vetorial normado. Esta definição é conveniente por várias razões, uma das quais sendo que faz sentido em dimensão infinita. Uma desvantagem séria porém é que $T \mapsto |T|$ não é uma função diferenciável em $\mathcal{L}(E; F)$.

Exemplo. Seja $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, consideremos a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuja matriz relativa à base canônica é $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right)$. Para cada vetor unitário $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, temos $|T \cdot u| = \sqrt{x^2 \cos^2\theta + y^2 \operatorname{sen}^2\theta}$. Por conseguinte, $|T| = \sqrt{M}$, onde M é o máximo da função $\theta \mapsto x^2 \cdot \cos^2\theta + y^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta$. Um simples exercício de cálculo nos mostra que $|T| = \max\{|x|, |y|\}$. Daí resulta que a função $T \mapsto |T|$ não é diferenciável, pois compondo-a com a aplicação diferenciável

$(x,y) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right)$ obtemos $(x,y) \mapsto \max\{|x|,|y|\}$, a qual não é diferenciável nas diagonais do plano.

A fim de eliminar esta dificuldade, introduziremos agora um produto interno em $\mathcal{L}(E;F)$.

A cada $A \in \mathcal{L}(E;F)$ corresponde sua *adjunta* $A^* \in \mathcal{L}(F;E)$, caracterizada pela igualdade

$$\langle A \cdot v, w\rangle = \langle v, A^* \cdot w\rangle, \;\; v \in E, \;\; w \in F.$$

O produto interno de duas transformações lineares $A, B \in \mathcal{L}(E;F)$ será definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^* B),$$

onde tr significa o traço. Note-se que $A^*B \in \mathcal{L}(E)$, de modo que seu traço tem sentido.

Se tomarmos bases ortonormais em E e F e supusermos que as matrizes de A e B, relativas a essas bases, são respectivamente (a_{ij}) e (b_{ij}) então as matrizes de A^* e B^*, relativas às mesmas bases, são as transpostas (a_{ji}) e (b_{ji}). Portanto

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^* B) = \sum_{,j} a_{ij} b_{ij} \,.$$

Vemos pois que, se $E = \mathbb{R}^m$ e $F = \mathbb{R}^n$, o produto interno $\langle A, B\rangle$ coincide com o produto interno euclidiano usual em $\mathbb{R}^{nm}$, quando fazemos as identificações

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \approx M(n \times m;\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{nm}.$$

Vemos ainda que $\operatorname{tr}(A^*B) = \operatorname{tr}(BA^*) = \operatorname{tr}(AB^*) = \operatorname{tr}(B^*A)$.

Os axiomas do produto interno são facilmente verificados. Obtemos uma nova definição de norma de uma transformação linear

$A \in \mathcal{L}(E;F)$, no caso em que E e F têm produtos internos, a saber

$$||A|| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}.$$

A função $A \mapsto ||A||^2$ é agora de classe C^∞ em $\mathcal{L}(E;F)$, enquanto que $A \mapsto ||A||$ é C^∞ exceto no ponto $0 \in \mathcal{L}(E;F)$.

Para todo $v \in E$, vale a desigualdade

$$|A \cdot v| \leq ||A|| \cdot |v|.$$

Com efeito, ela é equivalente a $\langle A \cdot v, A \cdot v\rangle \leq ||A||^2 \cdot \langle v, v\rangle$, ou seja, a $\langle A^*A \cdot v, v\rangle \leq \mathrm{tr}(A^*A) \cdot \langle v, v\rangle$.

Para provar esta última, observemos que o operador $A^*A \in \mathcal{L}(E)$ é simétrico e não-negativo, logo existe uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset E$ tal que $A^*A \cdot u_i = \lambda_i \cdot u_i$, com $\lambda_i \geq 0$. Seja $v = \Sigma\, \alpha^i v_i$. A desigualdade que queremos provar torna-se

$$\Sigma\, \lambda_i (\alpha^i)^2 \leq (\Sigma\, \lambda_i) \cdot (\Sigma (\alpha^j)^2),$$

o que é evidente, pois os λ_i são ≥ 0.

Seja agora $f\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades riemannianas. Em cada ponto $p \in M$, a derivada de f é uma transformação linear $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$, entre espaços vetoriais com produtos internos, de modo que tem sentido considerar as normas $|f'(p)|$ e $||f'(p)||$ discutidas acima.

Proposição 3. *Seja $f\colon M^m \to N^n$ uma aplicação de classe C^{k+1}, entre variedades que possuem métricas riemannianas de classe C^k. A função $\lambda\colon M \to \mathbb{R}$, definida por $\lambda(p) = ||f'(p)||^2$, é de classe C^k.*

Demonstração: Como se trata de um problema local, admitimos que $f\colon U \to V$ é uma aplicação de classe C^{k+1} de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, e são dadas métricas riemannianas g em U, e h em V, ambas de classe C^k.

Para cada $p \in U$, indiquemos com $E_p = TU_p$ o espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ com o produto interno $g_p = \langle\, , \rangle_p$ e, para $q \in V$, seja $F_q = TV_q$ o espaço $\mathbb{R}^n$ com o produto interno $h_q = \langle\, , \rangle_q$. Sejam $G\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ e $H\colon V \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ as aplicações de classe C^k tais que, para quaisquer $p \in U$, $q \in V$, tem-se $\langle u, v\rangle_p = \langle G(p)\cdot u, v\rangle$, $u, v \in \mathbb{R}^m$ e $\langle w, z\rangle_q = \langle w, H(q)\cdot z\rangle$, onde $w, z \in \mathbb{R}^n$. Indiquemos com $f'(p)^\#\colon F_q \to E_p$, $q = f(p)$ a adjunta da derivada $f'(p)\colon E_p \to F_q$. Quando considerarmos $f'(p)$ como transformação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, sua adjunta será indicada, como de costume, por $f'(p)^*$. Para todos $v \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$, $p \in U$ e $q \in V$, temos

$$\begin{aligned}\langle v, G(p)f'(p)^\# \cdot w\rangle &= \langle G(p)\cdot v, f'(p)^\# \cdot w)\rangle \\ &= \langle v, f'(p)^\# \cdot w\rangle_p = \langle f'(p)\cdot v, w\rangle_q \\ &= \langle f'(p)\cdot v, H(q)\cdot w\rangle = \langle v, f'(p)^*\, H(q)\cdot w\rangle.\end{aligned}$$

Portanto $G(p)f'(p)^\# = f'(p)^*\, H(q)$, ou seja, $f'(p)^\# = G(p)^{-1}$ $f'(p)^*\, H(f(p))$. Concluimos, finalmente, que

$$||f'(p)||^2 = \mathrm{tr}(f'(p)^\#\, f'(p)) = \mathrm{tr}[G(p)^{-1}\, f'(p)^*\, H(f(p))],$$

o que mostra ser $\lambda\colon U \to \mathbb{R}$, definida por $\lambda(p) = ||f'(p)||^2$, uma função de classe C^k. A proposição está demonstrada.

Se desejarmos usar a norma

$$|f'(p)| = \sup\{|f'(p)\cdot u|_q\,;\, u \in TM_p, |u|_p = 1, q = f(p)\},$$

então podemos apenas afirmar o seguinte:

Proposição 4. *Seja $f\colon M^m \to N^n$ uma aplicação de classe C^{k+1}, entre variedades dotadas de métricas riemannianas de classe C^k. A função $\mu\colon M \to \mathbb{R}$, definida por $\mu(p) = |f'(p)|$, é contínua.*

Demonstração: Podemos admitir que $f\colon U \to V$ é de classe C^{k+1} entre abertos $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, munidos de métricas riemannianas, g em U, h em V, ambas de classe C^k. Pela Proposição 1, existem aplicações contínuas $\Gamma\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ e $\Delta\colon V \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tais que $|v|_p = |\Gamma(p)\cdot v|$ e $|w|_q = |\Delta(q)\cdot w|$ para quaisquer $v \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\begin{aligned}\mu(p) &= \sup\{|f'(p)\cdot v|_{f(p)};\, v \in \mathbb{R}^m,\, |v|_p = 1\}\\ &= \sup\{|\Delta(f(p))\cdot f'(p)\cdot v|;\, v \in \mathbb{R}^m,\, |\Gamma(p)\cdot v| = 1\}\\ &= \sup\{|\Delta(f(p))\cdot f'(p)\cdot \Gamma(p)^{-1}\cdot u|;\, u \in \mathbb{R}^m;\, |u| = 1\}\\ &= |\Delta(f(p))\cdot f'(p)\cdot \Gamma(p)^{-1}|,\end{aligned}$$

onde a última norma é a do sup em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$. Como $|\ |\colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é contínua, a proposiçáo está demonstrada.

3 A distância intrínseca

Numa variedade riemanniana M, faz sentido falar em muitos conceitos geométricos. Por exemplo, podemos definir o comprimento de um caminho $\alpha\colon [a,b] \to M$, de classe C^1, imitando o que se faz em $\mathbb{R}^3$, isto é, pondo $\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt$. Nesta expressão, $|\alpha'(t)| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle}_{\alpha(t)}$ é a norma do vetor tangente $\alpha'(t) \in TM_{\alpha(t)}$, segundo o produto interno definido pela métrica de M. Podemos também considerar $|\alpha'(t)|$ como a norma da derivada $\alpha'(t)\colon \mathbb{R} \to TM_{\alpha(t)}$. Pela Proposição 4, segue-se que o integrando $|\alpha'(t)|$ é uma função contínua de t e portanto a integral que define $\ell(\alpha)$ tem sentido.

Um caminho $\alpha\colon [a,b] \to M$ diz-se *seccionalmente de classe* C^1 se α é contínuo e existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ tal que $\alpha_i = \alpha|[t_i, t_{i+1}]$ é de classe C^1 para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Usaremos a notação $\alpha = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ para indicar um caminho seccionalmente C^1. Ainda neste caso podemos definir o comprimento de α por

$$\ell(\alpha) = \ell(\alpha_1) + \cdots + \ell(\alpha_n).$$

A aditividade da integral mostra que $\ell(\alpha)$ não depende da escolha da partição.

No que se segue, M será uma variedade riemanniana *conexa*, de classe C^k.

Dados dois pontos arbitrários $p, q \in M$, existe um caminho $\alpha\colon [0,1] \to M$ seccionalmente de classe C^k, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$.

Com efeito, consideremos um qualquer caminho contínuo $\beta\colon [0,1] \to M$ ligando p a q e tomemos uma partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tal que $\beta([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para cada $i = 0, \dots, n-1$, onde U_i é o domínio de um sistema de coordenadas $x_i\colon U_i \to \mathbb{R}^m$ cuja imagem é convexa. Para cada $i = 0, \dots, n-1$ seja $\alpha_i\colon [t_i, t_{i+1}] \to M$ a imagem por x_i^{-1} do segmento de reta em $\mathbb{R}^m$ que liga $x_i(\beta(t_i))$ a $x_i(\beta(t_{i+1}))$, ou seja, $\alpha_i(t) = x_i^{-1}[(1-t)x_i(\beta(t_i)) + t x_i(\beta(t_{i+1}))]$, $t_i \le t \le t_{i+1}$. Então $\alpha = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ é um caminho seccionalmente de classe C^1 ligando p a q.

Podemos então definir a *distância intrínseca* $d(p,q)$ entre dois pontos p, q de uma variedade riemanniana conexa como $d(p,q) = \inf\{\ell(\alpha); \alpha$ seccionalmente C^1 em M, ligando p a $q\}$.

Proposição 5. *Seja M uma variedade diferenciável, com uma métrica riemanniana de classe C^0. A distância intrínseca acima definida satisfaz os axiomas que definem um espaço métrico.*

Demonstração: Sem dúvida, $d(p,q) = 0$, $d(p,q) \ge 0$, $d(p,q) = d(q,p)$ e $d(p,r) \le d(p,q) + d(q,r)$. Resta verificar que $p \ne q \Rightarrow d(p,q) > 0$. Segue-se do axioma de Hausdorff que existe uma

vizinhança U do ponto p tal que $q \notin \overline{U}$. Podemos supor que $\overline{U}$ está contido no domínio de um sistema de coordenadas x em M tal que $x(U) = B(1)$ e $x(p) = 0$. Então $\overline{U}$ é compacto. pela Proposição 4, vemos que $0 < \delta = \sup\{|x'(r)|; r \in \overline{U}\} < \infty$. Como q está no exterior de U, para cada caminho $\alpha\colon [a,b] \to M$, seccionalmente C^1, ligando p a q, existe $\alpha \in [a,b]$ tal que $\alpha(c)$ está na fronteira de U, ou seja, $|x(\alpha(c))| = 1$. Resulta daí que

$$1 \leq \int_a^c |(x \circ \alpha)'(t)|\, dt \leq \delta \int_a^c |\alpha'(t)|\, dt \leq \delta\, \ell(\alpha).$$

Portanto, $\ell(\alpha) \geq \dfrac{1}{\delta}$ para todo caminho seccionalmente C^1 ligando p a q, donde $d(p,q) > 0$.

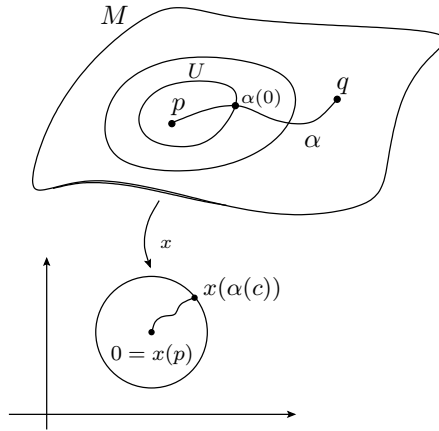



Figura 9.1.

Empregaremos o adjetivo "intrínseco" para qualificar todos os conceitos de espaço métrico relativos à distância intrínseca d.

Proposição 6. *A topologia de M definida pela distância intrínseca coincide com a topologia original de M.*

Demonstração: Seja $p \in M$.

(i) Toda vizinhança $p \in V \subset M$ contém uma bola intrínseca de centro em p. Com efeito, seja $x\colon V_1 \to \mathbb{R}^m$ um sistema de coordenadas em torno de p tal que $p \in U \subset \overline{U} \subset V_1 \subset V$, com $x(p) = 0 \in x(U) = B(1)$. Pelo argumento da Proposição 5, tem-se

$$q \in M - V \Rightarrow q \in M - \overline{U} \Rightarrow d(p,q) \geq \frac{1}{\delta}.$$

Em outras palavras, $d(p,q) < \dfrac{1}{\delta} \Rightarrow q \in V$, isto é, $B\big(p; \dfrac{1}{\delta}\big) \subset V$.

(ii) Toda bola intrínseca de centro p e raio $\varepsilon > 0$ contém uma vizinhança coordenada do ponto p.

Seja $x\colon V \to \mathbb{R}^m$ um qualquer sistema de coordenadas em torno de p. Podemos supor que $x(p)=0$ e que $\delta = \sup\{|x'(r)^{-1}|; r \in V\} < \infty$. Seja B uma bola aberta no espaço euclidiano, contida em $x(V)$, com centro na origem e raio menor que ε/δ. Escrevamos $U = x^{-1}(B)$. Afirmamos que U está contido na bola intrínseca $B(p;\varepsilon)$, de centro p e raio ε. De fato, dado $q \in U$ podemos ligar q e p pelo caminho $\alpha\colon [0,1] \to M$ dado por $\alpha(t) = x^{-1}(t \cdot x(q))$. Como $|x(q)| < \varepsilon/\delta$ temos

$$\begin{aligned}
\ell(\alpha) &= \int_0^1 |\alpha'(t)|\, dt = \\
&= \int_0^1 \big|[x'(x^{-1}(tx(q)))]^{-1} \cdot x(q)\big|\, dt \leq \\
&\leq \int_0^1 \delta |x(q)|\, dt < \delta \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $d(p,q) < \varepsilon$, ou seja $U \subset B(p;\varepsilon)$, o que conclui a demonstração.

4 A topologia geral de uma variedade

4.1 - Propriedade de Hausdorff

Consideremos novamente o Exemplo 1, Seção 5, Cap. IV, onde uma variedade não-Hausdorff M foi definida pelo atlas $\mathfrak{A} = [x, y]$, com $x\colon A \cup C \to \mathbb{R}$, $y\colon B \cup C \to \mathbb{R}$, $(A \cup C) \cap (B \cup C) = C$ e $x|C = y|C$.

Existe uma única métrica riemanniana em M em relação a qual x e y são isometrias. Esta métrica é induzida por x em $A \cup C$ e por y em $B \cup C$.

A variedade riemanniana M é conexa: para ligar os pontos a e b por um caminho contínuo, devemos partir de a, seguir ao longo de C até certo ponto, retornar pelo mesmo caminho e chegarmos assim em b.

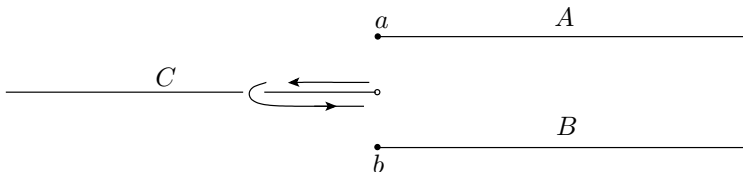



Figura 9.2.

Vemos que existem caminhos de comprimentos arbitrariamente pequenos ligando a e b, logo $d(a, b) = 0$ muito embora $a \neq b$. Portanto a implicação $p \neq q \Rightarrow d(p, q) > 0$ (ponto crucial da Proposição 4) pode não ser verdadeira em uma variedade não-Hausdorff M. A distância intrínseca define apenas uma pseudo-métrica em M.

Outro fato ainda mais desagradável é que a topologia (não-Hausdorff) de M definida pela pseudo-métrica intrínseca jamais irá coincidir com a topologia original de M. Realmente, a topologia original de M sempre é localmente de Hausdorff, enquanto

que a topologia definida por uma pseudo-métrica autêntica *nunca* é localmente de Hausdorff.

No exemplo acima, o ponto b pertence a toda pseudo-bola centrada em a mas não está em nenhuma vizinhança coordenada do ponto a.

4.2 - O axioma da base enumerável

Aos objetos que forem quase variedades diferenciáveis, faltando ser cumprida apenas a exigência da base enumerável, chamaremos, à falta de nome melhor, de *multiplicidades diferenciáveis.*

De qualquer maneira, uma multiplicidade diferenciável tem base enumerável localmente, isto é, cada ponto $p \in M$ posui uma vizinhança (de coordenadas) que tem base enumerável.

Por conseguinte, uma multiplicidade é um espaço E1, embora não necessariamente E2.

É realmente fácil dar exemplos de multiplicidades diferencáveis que não possuem base enumerável de abertos. Basta considerar a soma topológica de uma quantidade não enumerável de cópias de uma variedade diferenciável não vazia M_0. Ou equivalentemente, seja $M = M_0 \times A$ o produto cartesiano de uma variedade diferenciável M_0 com um espaço discreto e não-enumerável A. Estes exemplos são triviais porque fornecem uma multiplicidade M não-conexa. Por outro lado, não é tão fácil obter exemplos de multiplicidades conexas sem base enumerável, embora tais objetos existam (ver R. Nevanlinna, “Uniformisierung”, pag. 51, para um exemplo bi-dimensional e Milnor “Der Ring der Vektorraumbündel”, pag. 39, para um caso unidimensional).

Todos os resultados dos Capítulos IV e VII, bem como as Proposições 5 e 6 deste capítulo, se aplicam às multiplicidades diferenciáveis.

Proposição 7. *Seja M uma multiplicidade conexa de classe C^k. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *M possui base enumerável (i.e., M é uma variedade).*

(ii) *M admite partições da unidade (i.e., toda cobertura aberta de M admite uma partição da unidade de classe C^k a ela subordinada).*

(iii) *Existe uma métrica riemanniana de classe C^{k-1} em M.*

Demonstração:
(i) $\Rightarrow$ (iii) Corolário 1 da Proposição 1, Capítulo VIII.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Proposição 1, Capítulo IX.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Pela Proposição 4, M é um espaço metrizável.

Como, além disso, M é conexo e localmente compacto, segue-se que M tem base enumerável. (Vide ETG, Corolário, pag. 225).

Corolário. *Seja M uma multiplicidade diferenciável conexa e N uma variedade de classe C^1. Se existe uma imersão $f\colon M \to N$ de classe C^1 então M é uma variedade.*

Com efeito, tomando uma métrica riemanniana de classe C^0 em N, a imersão f induz em M uma métrica riemanniana de classe C^0. Pela Proposição 7, M possui base enumerável, ou seja, é uma variedade.

Observação: O corolário acima não é trivial, mesmo se f for injetiva, pois a topologia de M pode ser consideravelmente mais fina do que a induzida por f. Obviamente, o resultado é imediato quando f for um mergulho.

Exemplo. No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, sua métrica usual coincide com a métrica intrínseca. Por outro lado, numa superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, a distância usual em $\mathbb{R}^n$ não induz em M sua métrica intrínseca, nem mesmo quando M é um subconjunto aberto de

$\mathbb{R}^n$ (ou seja, $m = n$), salvo se esse aberto é convexo. Por exemplo, se omitirmos do plano $\mathbb{R}^2$ o segmento $[-1, +1]$ do eixo dos y, obteremos um aberto no qual a distância intrínseca entre os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ é $2\sqrt{2}$, em vez de 2. Na esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a distância intrínseca entre dois pontos p, q é o comprimento do menor dos arcos de círculo máximo que ligam p a q. (Se $p \neq -q$, há apenas 2 desses arcos. Se $p = -q$, há uma infinidade, todos de mesmo comprimento, π.) É claro que se $S \subset M$ é uma subvariedade e d_S, d_M indicam as distâncias intrínsecas respectivas, então $d_M(p, q) \leq d_S(p, q)$ para quaisquer $p, q \in S$.

5 Isometrias

Em toda esta seção, M^m e N^n designarão variedades de classe C^{k+1} dotadas de métricas riemannianas de classe C^k.

Seja $f\colon M \to N$ diferenciável. Diremos que sua derivada $f'(p)\colon TM_p \to TN_q$, $q = f(p)$, *preserva o produto interno* quando $\langle f'(p) \cdot u, f'(p) \cdot v \rangle_q = \langle u, v \rangle_p$ para quaisquer $u, v \in TN_p$. Como se sabe, isto ocorre se, e somente se, $f'(p)$ preserva a norma, ou seja, $|f'(p) \cdot u|_q = |u|_p$ para todo $u \in TM_p$.

Quando uma aplicação diferenciável $f\colon M \to N$ preserva o produto interno em todos os pontos $p \in M$, dizemos que f é uma *imersão isométrica* de M em N. Isto implica, em particular, que $\dim M \leq \dim N$ e que f é localmente injetiva. Se, além disso, f for um homeomorfismo de M sobre $f(M)$, diremos que f é um *mergulho isométrico* de M em N. Uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana em outra de mesma dimensão chama-se uma *isometria local*. Uma *isometria* $f\colon M \to N$ é uma bijeção diferenciável cuja derivada, em todos os pontos, preserva o produto interno. Toda isometria é um difeomorfismo.

Exemplos. 1) Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Para que um

caminho $f\colon J \to M$, de classe C^1, seja uma imersão isométrica, é necessário e suficiente que em todos os pontos $t \in J$, seu vetor velocidade $f'(t)$ tenha comprimento 1. Quando isto ocorre, então, para cada intervalo fechado $[a,b] \subset J$, o caminho $f|[a,b]$ tem comprimento $b-a$, pois $\ell(f|[a,b]) = \int_a^b |f'(t)|\,dt = \int_a^b dt = b-a$. Reciprocamente, se o comprimento de cada caminho restrito $f|[a,b]$ é $b-a$ então, para cada $t \in J$ devemos ter $|f'(t)| = 1$. Com efeito, fixando a em J, obtemos $t - a \leq \ell(f|[a,t]) = \int_a^t |f'(s)|\,ds$ para qualquer $t > a$ em J. Derivando em relação a t, vem $1 = |f'(t)|$, como queríamos. Em virtude deste fato, um caminho cujo vetor velocidade tem comprimento 1 em todos os pontos diz-se *parametrizado pelo comprimento de arco.*

É interessante observar que para todo caminho $f\colon J \to M$, de classe C^r $(r \geq 1)$, tal que $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$, existe uma reparametrização, isto é, um difeomorfismo $\varphi\colon I \to J$, de classe C^r, tal que $f \circ \varphi\colon I \to M$ é parametrizado pelo comprimento de arco. Com efeito, escolhamos um ponto $a \in J$ e definamos $\lambda\colon J \to \mathbb{R}$ pondo $\lambda(t) = \int_a^t |f'(s)|\,ds$. (Aqui $\lambda(t) < 0$ se $t < a$.) Evidentemente, $\lambda \in C^r$ e $\lambda'(t) = |f'(t)| > 0$. Segue-se que λ é crescente e é um difeomorfismo de J sobre um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Seja $\varphi = \lambda^{-1}\colon I \to J$. Então o caminho reparametrizado $f \circ \varphi\colon I \to M$ é tal que, para cada $0 = \lambda(t) \in I$, temos

$$|(f \circ \varphi)'(s)| = |f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)| = |f'(t) \cdot \frac{1}{\lambda'(t)}| = \frac{|f'(t)|}{\lambda'(t)} = 1.$$

Por conseguinte, $f \circ \varphi$ é parametrizado pelo comprimento de arco.

Um caso particular: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, é uma imersão isométrica da reta no plano, cuja imagem é o círculo unitário S^1.

2) Seja $\lambda\colon J \to \mathbb{R}^2$ um caminho de classe C^r $(r \geq 1)$, parametrizado pelo comprimento de arco. Aplicaremos a faixa aberta $U = J \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, pondo $f(x,y) = (\lambda(x), y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Então $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica. Se λ for um homeomorfismo sobre $\lambda(J)$, então f será um mergulho isométrico e, por conseguinte, uma isometria de U sobre a superfície $f(U)$, que é chamada o *cilindro reto* de base $\lambda(J)$.

3) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x,y) = (\cos x, \operatorname{sen} x, \cos y, \operatorname{sen} y)$. Então f é uma imersão isométrica, cuja imagem $f(\mathbb{R}^2)$ é um toro (de dimensão 2) em $\mathbb{R}^4$. Com efeito, a relação de equivalência induzida por f tem como classes de equivalência as classes laterais do subgrupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ e portanto existe uma decomposição:

No diagrama acima, π é o difeomorfismo local canônico de $\mathbb{R}^2$ sobre o toro $T^2 = \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$. (Vide Capítulo VI, Seção 7). Como $\bar{f} \circ \pi = f \in C^\infty$, segue-se da Proposição   que $\bar{f} \in C^\infty$. Como $\bar{f}$ é claramente uma imersão biunívoca e T^2 é compacto, concluimos que $\bar{f}$ é um mergulho do toro T^2 em $\mathbb{R}^2$, cuja imagem coincide com $f(\mathbb{R}^2)$.

Mais geralmente, de modo análogo, podemos definir, para cada inteiro m, uma imersão isométrica $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{2m}$, de classe C^∞, cuja imagem é um toro de dimensão m. Em outras palavras, em

cada toro pode-se introduzir uma métrica riemanniana que o torna localmente isométrico ao espaço euclidiano.

Note-se que não pode existir uma imersão isométrica $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem seja o toro. Mais geralmente, não existe uma superfície compacta $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ que seja localmente isométrica ao plano $\mathbb{R}^2$. Isto resulta de fatos conhecidos de Geometria Diferencial pois uma superfície localmente isométrica ao plano tem curvatura gaussiana identicamente nula, enquanto que toda superfície compacta $M^2 \subset \mathbb{R}^2$ deve possuir pelo menos um ponto cuja curvatura gaussiana é positiva. (Vide M.P. do Carmo "Elementos de Geometria Diferencial", pág. 106, Exerc. 14.)

4) Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador ortogonal. Munido do seu produto interno natural, $\mathbb{R}^n$ é uma variedade riemanniana e T é uma isometria. Conseqüentemente, se $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície tal que $T(M) = M$, então $f = T|M$ é uma isometria de M. (Bem entendido, estamos considerando em M a métrica riemanniana induzida de $\mathbb{R}^n$.) Em particular, como $T(S^{n-1}) = S^{n-1}$ para toda transformação $T \in O(\mathbb{R}^n)$, obtemos uma infinidade de isometrias $f\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ considerando as restrições à esfera S^{n-1} de operadores ortogonais em $\mathbb{R}^n$. Assim temos a aplicação *antípoda* $\alpha\colon p \mapsto -p$, as *reflexões* $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, -x^i \ldots, x^n)$, etc. Outras superfícies podem ser transformadas sobre si mesmas por meio de certos operadores ortogonais. (Diz-se então que a superfície exibe um certo tipo de simetria.) Por exemplo, o toro de revolução, obtido como por rotação de um círculo vertical em torno do eixo $x = y = 0$, admite as isometrias $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$, $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$, $p \mapsto -p$, etc.

5) Sabemos que, dadas uma imersão $f\colon M^m \to N^m$, de classe C^{k+1}, e uma métrica riemanniana h em N, de classe C^k, existe uma métrica riemanniana g em M, de classe C^k, que torna f uma isometria local. Basta tomar $g =$ métrica induzida por f. (Vide

Seção 1, Cap. IX.) Consideremos agora a situação oposta. Dada a imersão f, entre variedades de mesma dimensão, supomos que M possui uma métrica riemanniana e queremos saber se existe uma métrica em N que torna f uma isometria local. Condição necessária e suficiente para que isto ocorra é a seguinte: Se $p, q \in M$ são tais que $f(p) = f(q)$, então a transformação linear $f'(q)^{-1} \circ f'(p) \colon TM_p \to TN_q$ é uma isometria linear.

Com efeito, em cada ponto $p \in M$, a derivada $f'(p) \colon TM_p \to TN_{f(p)}$ é um isomorfismo linear. Logo existe um único produto interno em $TN_{f(p)}$ que a torna uma isometria. Se $q \in M$ é outro ponto tal que $f(p) = f(q)$, o produto interno induzido por $f'(q)$ em $TN_{f(q)}$ coincide com o anterior, pois $f'(p) = f'(q) \circ L$, onde $L \colon TM_p \to TM_q$ é a isometria $f'(q)^{-1} \circ f'(p)$. Assim, existe uma métrica riemanniana em N que torna f uma isometria local. Sendo $f \in C^{k+1}$, isto faz com que tal métrica (induzida localmente por f^{-1}) seja de classe C^k. A recíproca é óbvia. Como exemplo de tal situação, sejam M^m uma variedade com uma métrica riemanniana de classe C^k e $f \colon M^m \to N^m$ um difeomorfismo local de classe C^{k+1} com a seguinte propriedade: dados $p, q \in M$ com $f(p) = f(q)$, existe uma isometria $\varphi \colon M \to M$, de classe C^{k+1}, tal que $f \circ \varphi = f$ e $\varphi(p) = q$. Então existe uma métrica riemanniana de classe C^k em N que torna f uma isometria local. Com efeito, temos $f'(\varphi(p)) \circ \varphi'(p) = f'(p)$, ou seja $\varphi'(p) = f'(p)^{-1} \circ f'(p)$, sempre que $f(p) = f(q)$. Como $\varphi'(p) \colon TM_p \to TM_q$ é uma isometria linear, o resultado segue-se. Aplicações: existem métricas riemannianas no espaço projetivo P^m e no toro $T^m = \mathbb{R}^m/(\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})$ que tornam as aplicações canônicas $\pi \colon S^m \to P^m$ e $\pi' \colon \mathbb{R}^m \to T^m$ isometrias locais. Com efeito, a aplicação antípoda $\varphi \colon S^m \to S^m$ é uma isometria tal que $\pi(p) = \pi(q) \Leftrightarrow q = \varphi(p)$. Além disso, $\pi'(p) = \pi'(q) \Leftrightarrow a = q - p \in \mathbb{Z}^m$. A translação $\varphi \colon x \mapsto x + a$ é uma isometria de $\mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ \varphi = \pi'$ e $\varphi(p) = q$. A métrica de

P^n que torna $\pi\colon S^m \to P^m$ uma isometria local chama-se métrica *elíptica*. A métrica de T^m que torna $\pi'\colon \mathbb{R}^m \to T^m$ uma isometria local é chamada métrica *achatada*.

6) Seja G um grupo de Lie. Uma métrica riemanniana em G diz-se *invariante à esquerda* quando, para todo $g \in G$, a translação à esquerda $\ell_g\colon h \mapsto gh$ é uma isometria de G. Analogamente se define métrica *invariante à direita* de *métrica bi-invariante*. Em todo grupo de Lie, existe uma métrica invariante à esquerda. Basta considerar um produto interno na álgebra de Lie TG_e e estendê-lo por translação à esquerda, isto é, impondo que, para cada $g \in G$, a derivada $\ell_g'(e)\colon TG_e \to TG_g$ seja uma isometria. Isto é suficiente para que cada derivada $\ell_g'(h)\colon TG_h \to TG_{gh}$ preserve o produto interno. De maneira análoga se mostra que todo grupo de Lie pode ser munido de uma métrica invariante à direita.

7) Mostraremos agora que o grupo ortogonal $O(\mathbb{R}^m)$, considerado como superfície em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{m^2}$, herda deste espaço euclidiano uma métrica bi-invariante. Com efeito, associemos a cada $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ a aplicação linear $\ell_A\colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ que consiste na multiplicação à esquerda por A, ou seja, $\ell_A(X) = A \cdot X$. Consideremos em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ o produto interno $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(X^*Y)$. Então, se $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ for ortogonal, $\ell_A\colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ também será ortogonal, pois $\langle \ell_A(X), \ell_A(Y)\rangle = \langle AX, AY\rangle = \operatorname{tr}(X^*A^*AY) = \operatorname{tr}(X^*Y) = \langle X, Y\rangle$. A recíproca também vale: se ℓ_A for ortogonal, A o será. A demonstração é deixada a cargo do leitor. De qualquer modo, concluimos que, para cada $A \in 0(\mathbb{R}^m)$, ℓ_A é uma isometria de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Por conseguinte, se $G \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ é um grupo de Lie que contém a transformação ortogonal A, então $\ell_A(G) = G$ e, por conseguinte, a restrição $\ell_A|G$ é uma isometria de G, quando tomamos neste grupo sua métrica riemaniana natural, induzida de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Por exemplo, o grupo unimodular $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ contém o grupo ortogonal. Logo, para cada $A \in O(\mathbb{R}^m)$, a translação à es-

querda ℓ_A é uma isometria de $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$. Evidentemente, para cada $A \in O(\mathbb{R}^m)$, ℓ_A é uma isometria de $O(\mathbb{R}^m)$, ou seja, a métrica natural do grupo ortogonal (induzida pelo espaço euclidiano $\mathbb{R}^{m^2}$) é invariante à esquerda. (Mas a métrica natural de $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ não é invariante à esquerda.) Tudo o que foi dito acima se aplica para a translação à direita $r_A\colon X \mapsto X \cdot A$. Basta notar que $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$. Segue-se que a métrica riemanniana natural de $O(\mathbb{R}^m)$ é bi-invariante.

8) Seja $f\colon M \to N$ uma imersão isométrica. Então f preserva o comprimento de arco, isto é, se $\lambda\colon [a,b] \to M$ é um caminho de classe C^1, então $\ell(f \circ \lambda) = \ell(\lambda)$. Com efeito, para cada $t \in [a,b]$, temos $|(f \circ \lambda)'(t)| = |f'(\lambda(t)) \circ \lambda'(t)|$. O resultado segue-se por integração. Reciprocamente, se $f\colon M \to N$ é de classe C^1 e preserva comprimento de arco, então, para cada $p \in M$ e para cada $u \in TM_p$ com $|u| = 1$, podemos obter um caminho $\lambda\colon (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$, de classe C^1, parametrizado pelo comprimento de arco (vide Exemplo 1), tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = u$. Então $f \circ \lambda$ também será parametrizado pelo comprimento de arco. Por conseguinte $|f'(p) \cdot u| = |f'(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0)| = |(f \circ \lambda)'(0)| = 1$. Assim, a transformação linear $f'(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$ leva vetores de comprimento 1 em vetores de comprimento 1. Logo $f'(p)$ preserva normas e f é uma imersão isométrica.

Se considerarmos as variedades riemannianas M e N como espaços métricos, munidos das distâncias intrínsecas, uma imersão isométrica $f\colon M \to N$ satisfaz a condição $d(f(p), f(q)) \leq d(p,q)$. Com efeito, para todo caminho $\lambda\colon [a,b] \to M$, seccionalmente C^1, com $\lambda(a) = p$ e $\lambda(b) = q$, o caminho $f \circ \lambda$ liga $f(p)$ a $f(q)$ e tem o mesmo comprimento que λ. Podem eventualmente existir caminhos em N, ligando $f(p)$ a $f(q)$, que não são da forma $f \circ \lambda$, onde λ liga p a q em M. Por isso pode acontecer que $d(f(p), f(q)) < d(p,q)$. (Vide $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t)$.) Mas quando f é

uma isometria (difeomorfismo cuja derivada, em cada ponto, preserva o produto interno) então $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$ para quaisquer $p, q \in M$ e portanto $f\colon M \to N$ é também uma isometria no sentido de espaços métricos.

Capítulo X

Espaços de Funções

1 Funções semicontínuas em uma variedade

Seja X um espaço topológico. Uma função real $f\colon X \to \mathbb{R}$ diz-se *semicontínua inferiormente* no ponto $a \in X$ quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $x \in V$ implica $f(a) - \varepsilon < f(x)$. De modo análogo se define *semi-continuidade superior*.

Exemplos
1) Uma função é contínua se, e somente se, é semicontínua inferior e superiormente.
2) Um subconjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, sua função característica $f\colon X \to \mathbb{R}$ (definida por $f(A)$=1, $f(X-A)$=0) é semicontínua inferiormente. Analogamente, um subconjunto fechado é caracterizado pela semi-continuidade superior de sua função característica.

3) Se $f_1, \ldots, f_s$ são funções semicontínuas inferiormente (resp. superiormente) então o mesmo se dá para $f = \inf\{f_1, \ldots, f_s\}$ (resp. $g = \sup\{f_1, \ldots, f_s\}$).

4) Seja $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os caminhos contínuos e retificáveis $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ com a métrica $d(\alpha,\beta) = \sup\limits_{a\leq t\leq b} |\alpha(t) - \beta(t)|$. Então a função comprimento de arco,

$$\ell\colon \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

é semicontínua inferiormente, como se sabe da Análise.

Proposição 1. *Sejam $g, h\colon M \to \mathbb{R}$, respectivamente, funções semicontínuas inferior e superiormente numa variedade $M \in C^k$, tais que $h(p) < g(p)$ para cada $p \in M$. Então existe uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$, de classe C^k, tal que $h(p) < f(p) < g(p)$ para todo $p \in M$.*

Demonstração: Para cada $p \in M$ escrevamos $a_p = \frac{1}{2}[g(p) + h(p)]$. Então $h(p) < a_p < g(p)$, logo existe uma vizinhança V_p de p em M tal que $h(q) < a_p < g(q)$ para todo $q \in V_p$. Em outras palavras, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} = (V_p)_{p\in M}$ de M e uma família de números reais $(a_p)_{p\in M}$ tais que $q \in V_p \Rightarrow h(p) < a_p < g(q)$. Consideremos uma partição da unidade $\sum\limits_{p\in M} \varphi_p = 1$ estritamente subordinada à cobertura $\mathcal{V}$. A função $f\colon M \to \mathbb{R}$, de classe C^k, que estamos procurando, é obtida pela "média ponderada" $f = \sum\limits_{p\in M} a_p\varphi_p$. Com efeito, dado $q \in M$, temos $h(q) < a_p < g(q)$ se $q \in V_p$ e $\varphi_p(q) = 0$ se $q \notin V_p$. Logo $h(q) = \sum\limits_p \varphi_p(q)\cdot h(q) < \sum\limits_p a_p\varphi_p(q) = f(q) < \sum\limits_p \varphi_p(q)g(q) = g(q)$.

Corolário 1. *Seja $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma cobertura localmente finita de uma variedade $M \in C^k$. Seja $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de números reais positivos, com índices no mesmo conjunto A. Então existe uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$, de classe C^k, tal que $p \in C_\alpha \Rightarrow 0 < f(p) < a_\alpha$.*

Demonstração: Podemos supor que os conjuntos C_α são fechados, pois a família $(\overline{C}_\alpha)_{\alpha\in A}$ também é localmente finita. Defina-

mos $g\colon M \to \mathbb{R}$ pondo $g(p) = \inf\{a_\alpha; p \in C_\alpha\}$. Se provarmos que g é semicontínua inferiormente então existirá, pela Proposição 1, uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $0 < f(p) < g(p) \leq a_\alpha$ para todo $p \in M$. Em verdade, a função g é semicontínua inferiormente de um modo bastante curioso: cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança V_p tal que $q \in V_p \Rightarrow g(q) \geq g(p)$ (todo ponto é mínimo local). Com efeito, cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança V_p que intersecta apenas um número finito de conjuntos $C_{\alpha_1}, \ldots, C_{\alpha_s}$. Como estes conjuntos são fechados, restringindo as vizinhanças V_p, se necessário, podemos supor que cada V_p só intersecta os C_{α_i} que contêm p.

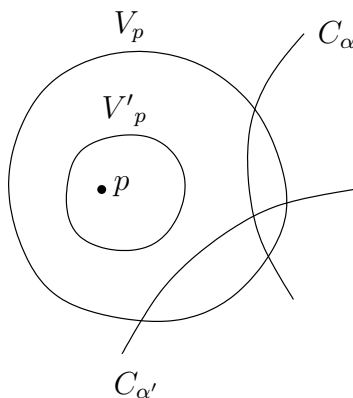



Figura 10.1.

Em outras palavras, dado $q \in V_p$, se $q \in C_\alpha$ então $p \in C_\alpha$. Logo $g(q) = \inf\{a_\alpha; q \in C_\alpha\} \geq \inf\{a_\alpha; p \in C_\alpha\} = g(p)$.

Corolário 2. *Seja $g\colon M \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua numa variedade M de classe C^k. Dada uma função contínua $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$ com $\varepsilon(p) > 0$ para todo $p \in M$, existe uma aplicação $f\colon M \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k, tal que $|g(p) - f(p)| < \varepsilon(p)$ para todo $p \in M$.*

Demonstração: Consideremos primeiro o caso $n = 1$. Como $\varepsilon(p) > 0$ tem-se, para todo $p \in M$, $g(p) - \varepsilon(p) < g(p) + \varepsilon(p)$. Pela

Proposição 1, existe uma aplicação $f\colon M \to \mathbb{R}$, de classe C^k, tal que $g(p)-\varepsilon(p) < f(p) < g(p)+\varepsilon(p)$ para todo $p \in M$. O caso geral resulta daí, considerando cada coordenada de g separadamente.

2 Espaços de funções

Sejam X um espaço topológico e Y um espaço métrico. Denotemos por $W^0(X;Y)$ o conjunto das aplicações contínuas $f\colon X \to Y$, dotado da topologia na qual as vizinhanças básicas de uma aplicação $f \in W^0(X;Y)$ são os conjuntos $W^0(f;\varepsilon)$, onde $\varepsilon\colon X \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e $W^0(f;\varepsilon) = \{g \in W^0(X;Y); d(f(x),g(x)) < \varepsilon(x) \,\forall\, x \in X\}$.

Quando ε descreve as funções contínuas > 0 em X, $W^0(f;\varepsilon)$ descreve um sistema fundamental de vizinhanças de f.

Esta topologia é denominada a *topologia de Whitney de classe* C^0.

Se X não for compacto, $W^0(X;Y)$ não será metrizável, pois nenhum dos seus pontos terá sistema fundamental enumerável de vizinhanças; no entanto, usaremos a notação $d(f,g) < \varepsilon$ significando que $d(f(x),g(x)) < \varepsilon(x)$ para todo $x \in X$.

Um outro modo de obter um sistema fundamental de vizinhanças de $f \in W^0(X;Y)$ é considerar os conjuntos $W(f;U)$, onde U é um aberto contendo o gráfico $G(f)$ em $X \times Y$ e $W(f;U) = \{g \in W^0(X;Y); G(g) \subset U\}$.

Para verificar a equivalência entre as duas definições, basta notar que, dada $\varepsilon\colon X \to \mathbb{R}$ contínua e positiva, então o conjunto $U = \{(x,y) \in X \times Y; d(y,f(x)) < \varepsilon(x)\}$ é um aberto que contém $G(f)$ e $W(f;U) \subset W^0(f;\varepsilon)$. Reciprocamente, dado o aberto $U \subset X \times Y$ contendo $G(f)$, definimos a função contínua positiva $\varepsilon\colon X \to \mathbb{R}$ pondo, para cada $x \in X$, $\varepsilon(x) = \operatorname{dist}[(x,f(x)), X \times Y - U]$. Então $W^0(f;\varepsilon) \subset W(f;Y)$.

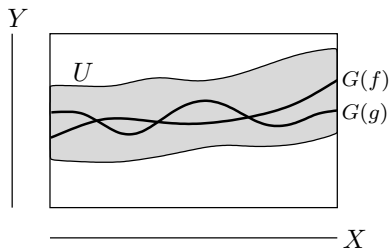



Figura 10.2.

Pelo Corolário 2, quando M é uma variedade de classe C^k, as aplicações $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k formam um *subconjunto denso* de $W^0(M;\mathbb{R}^n)$. Mais adiante mostraremos que este fato é verdadeiro se $Y = N$ é qualquer variedade diferenciável. (Vide Corolário da Proposição 9.)

Outra topologia que às vezes se considera no conjunto das aplicações contínuas $f\colon X \to Y$, de um espaço topológico X num espaço métrico Y, é a *topologia da convergência uniforme nos compactos*. O espaço topológico correspondente será denotado por $C^0(X;Y)$. As vizinhanças básicas de uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ são descritas nesta topologia por dois "parâmetros": uma parte compacta $K \subset X$ e um número real $\delta > 0$. Estas vizinhanças são os conjuntos

$$V(f;K,\delta) = \{g \in C^0(X;Y); d(f(x),g(x)) < \delta, \forall\, x \in K\}.$$

É claro que a aplicação identidade

$$i\colon W^0(X;Y) \to C^0(X;Y)$$

é contínua, isto é, a topologia de Whitney é mais fina que a da convergência uniforme nas partes compactas.

Se M é uma variedade diferenciável, o espaço $C^0(M;Y)$ é metrizável. Se, além disso, o espaço métrico Y tiver base enumerável, o mesmo ocorrerá com $C^0(M;Y)$. (Vide ETG, pags. 362, 363.)

Quando X é compacto, toda função contínua $\varepsilon\colon X \to \mathbb{R}$ atinge o seu mínimo, e portanto a outra aplicação identidade

$$j\colon C^0(X;Y) \;\to\; W^0(X;Y)$$

também é contínua. Neste caso $W^0(X;Y) = C^0(X;Y)$ é metrizável por $d(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)).x \in X\}$.

É evidente que quando M é uma variedade de classe C^k, as aplicações $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k também formam um subconjunto denso de $C^0(M;\mathbb{R}^n)$, pois a topologia de Whitney é mais fina.

Para o estudo das variedades diferenciáveis é mais interessante considerar a *topologia de Whitney de classe* C^k, que definiremos agora.

Sejam M e N variedades diferenciáveis de classe C^k $(k \geq 1)$. Admitamos que exista um mergulho $\varphi\colon N \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. (Para simplificar a notação vamos supor que $N \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície de classe C^k.) Mostraremos no próximo capítulo que esta hipótese adicional não é uma restrição; isto é, toda variedade pode ser mergulhada em algum espaço euclidiano.

Escolhamos uma métrica riemaniana em M, de classe C^{k-1} (isto é, pelo menos de classe C^0).

Indiquemos com $W^1(M;N)$ o conjunto das aplicações f: $M\to N$ de classe C^1, dotado da topologia na qual as vizinhanças básicas de uma aplicação $f \in W^1(M;N)$ são os conjuntos

$$W^1(f;\varepsilon) = \{g \in W^1(M,N); |f(p) - g(p)| < \varepsilon(p) \quad \text{e} \quad |f'(p) - g'(p)| < \varepsilon(p)\}.$$

Na expressão acima, $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva e $|f'(p) - g'(p)|$ é a norma da aplicação linear $f'(p) - g'(p)\colon TM_p \to \mathbb{R}^n$ (tomada em qualquer dos sentidos da Seção 3,

Cap. IX). Observemos que $TN_{f(p)}$ e $TN_{g(p)}$ são subespaços do $\mathbb{R}^n$, logo podemos considerar $f'(p)$ e $g'(p)$ como transformações lineares de TM_p em $\mathbb{R}^n$.

O leitor verificará que $W^1(M;N)$ é um espaço de Hausdorff.

Doravante, sempre que empregamos a notação $W^1(M;N)$, *estaremos admitindo tacitamente que* M *é uma variedade de classe* C^k, *munida de uma métrica riemaniana de classe* C^{k-1}, $(k \geq 1)$ *e que* N *é uma superfície de classe* C^k *em algum espaço euclidiano.*

Mostraremos na Seção 3 que a topologia de $W^1(M;N)$ independe da métrica riemaniana escolhida em M e do mergulho de N em algum espaço euclidiano.

Em geral, $W^1(M;N)$ não é metrizável. No entanto, escreveremos freqüentemente $|f-g|_1 < \varepsilon$ significando que $|f(p)-g(p)| < \varepsilon(p)$ e $|f'(p)-g'(p)| < \varepsilon(p)$ para todo $p \in M$.

Uma outra topologia no conjunto de todas as aplicações $f\colon M \to N$ de classe C^1 é a *topologia da convergência uniforme de classe* C^1 *nos subconjuntos compactos de* M. Este espaço topológico será denotado por $C^1(M;N)$. As vizinhanças básicas de uma aplicação $f \in C^1(M;N)$ são os conjuntos $V^1(f;K,\delta)$, onde $K \subset M$ é um subconjunto compacto, δ um número real positivo e $V^1(f;K,\delta) = \{g \in C^1(M;N); |f(p)-g(p)| < \delta$ e $|f'(p)-g'(p| < \delta$ para todo $p \in K\}$.

A aplicação identidade

$$i\colon W^1(M;N) \ \to \ C^1(M;N)$$

é contínua, isto é, a topologia de Whitney de classe C^1 é mais fina que a topologia C^1 da convergência compacta.

Obviamente, quando M é compacto, tem-se $W^1(M;N) = C^1(M;N)$.

O espaço $C^1(M;N)$ é metrizável, com base enumerável.

3 Invariância da topologia de $W^1(M;N)$

Mostraremos nesta seção que a topologia de $W^1(M;N)$ não depende da métrica riemaniana escolhida em M nem da maneira como N está mergulhada no espaço euclidiano. Para isto, examinaremos o comportamento de $W^1(M;N)$ como functor das "variáveis" M e N.

Sejam M, M_1, M_2 variedades riemanianas e N, N_1, N_2 superfícies no espaço euclidiano. Uma aplicação $\varphi\colon M_1 \to M_2$, de classe C^1, induz uma aplicação

$$\varphi^*\colon W^1(M_2;N) \to W^1(M_1;N),$$

definida por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

Por outro lado, uma aplicação de classe C^1, $\varphi\colon N_1 \to N_2$, induz

$$\varphi_*\colon W^1(M;N_1) \to W^1(M;N_2),$$

definida por $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$.

Tem-se $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$ e $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$. Além disso, $(\mathrm{id})^* = \mathrm{id}$ e $(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}$, de modo que se φ é um difeomorfismo então φ^* é uma bijeção, com $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$. Analogamente, $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$.

Ocorre o seguinte: quando $\varphi\colon N_1 \to N_2$ é de classe C^1, a aplicação induzida $\varphi_*\colon W^1(M.N_1) \to W^1(M;N_2)$ é contínua e portanto, quando φ é um difeomorfismo, φ_* é um homeomorfismo. Isto será demonstrado logo mais.

Infelizmente, porém, nem todas as aplicações $\varphi\colon M_1 \to M_2$ de classe C^1 induzem aplicações $\varphi^*\colon W^1(M_2;N) \to W^1(M_1;N)$ que são contínuas. Mesmo assim, quando φ é um difeomorfismo, φ^* é um homeomorfismo.

Examinemos primeiro φ^*.

Se a variedade M não é compacta, existe uma função contínua positiva $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $\inf\{\varepsilon(p); p \in M\} = 0$. Então, para qualquer $f \in W^1(M;N)$, a vizinhança básica $W^1(f;\varepsilon)$ não contêm aplicações constantes (exceto, possivelmente, f). Em outras palavras, quando M não é compacta, as alicações constantes formam um subconjunto discreto do espaço $W^1(M;N)$.

Segue-se daí que a inclusão natural $c\colon N \to W^1(M;N)$, a qual associa a cada ponto $q \in N$ a aplicação constante $c_q\colon M \to N$ (com $c_q(p) = q$ para todo $p \in M$), é descontínua se M não for compacta e se $\dim N > 0$.

Por outro lado, se tomarmos uma variedade reduzida a um ponto a, então $W^1(a;N)$ é homeomorfa a N pela aplicação $W^1(a;N) \to N$ que leva cada $f \in W^1(a;N)$ em sua imagem $f(a) \in N$. Assim, se M é uma variedade não-compacta e se $\dim N > 0$, então a aplicação $\varphi\colon M \to a$, de classe C^1, induz uma aplicação $\varphi^*\colon W^1(a;N) \to W^1(M;N)$, a qual é descontínua pois equivale a $c\colon N \to W^1(M;N)$ através do homeomorfismo natural $W^1(a;N) \approx N$.

A proposição abaixo será útil mais adiante.

Proposição 2. *Seja $\varphi\colon M_1 \to M_2$ uma aplicação de classe C^1. Dados um compacto $K \subset M_1$ e um número $\eta > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que $f, g \in W^1(M_2;N)$, $|f - g|_1 < \delta$ em $\varphi(K)$ implicam $|f\varphi - g\varphi|_1 < \eta$ em $\varphi(K)$.*

Demonstração: Tomemos um número real $A \geq \sup\{|\varphi'(p)|; p \in K\}$ e ainda com $A \geq 1$. Ponhamos $\delta = \eta/A$. Então, se $f, g \in W^1(M_2;N)$ são tais que $|f(q) - g(q)| < \delta$ para todo $q \in \varphi(K)$, segue-se que $|f(\varphi(p)) - g(\varphi(p))| < \delta \leq \eta$ e

$$\begin{aligned}|(f\varphi)'(p) - (g\varphi)'(p)| &= |f'(\varphi(p)) \cdot \varphi'(p) - g'(\varphi(p)) \cdot \varphi'(p)| \\ &\leq |f'(\varphi(p)) - g'(\varphi(p))| \cdot |\varphi'(p)| < \delta \cdot A \leq \eta\end{aligned}$$

para todo $p \in K$, como queríamos demonstrar.

Corolário. *Se M_1 for compacta, então toda $\varphi\colon M_1 \to M_2$ de classe C^1 induz $\varphi^*\colon W^1(M_2;N) \to W^1(M_1;N)$ contínua.*

Com efeito, dada uma função contínua positiva $\varepsilon\colon M_1 \to \mathbb{R}$, temos $\eta = \inf\{\varepsilon(p); p \in M_1\} > 0$. Pela proposição, existe uma função contínua positiva (constante) $\delta\colon M_2 \to \mathbb{R}$ tal que $g \in W^1(f;\delta) \Rightarrow g\varphi \in W^1(f\varphi;\eta) \subset W^1(f\varphi;\varepsilon)$, o que prova a continuidade de φ^*.

Refinaremos agora o argumento acima e concluiremos que φ^* é contínua quando φ é própria.

Proposição 3. *Seja $\varphi\colon M_1 \to M_2$ uma aplicação própria de classe C^1. Então $\varphi^*\colon W^1(M_2;N) \to W^1(M_1;N)$ é contínua.*

Demonstração: Dada $\varepsilon\colon M_1 \to \mathbb{R}$ contínua e positiva, definiremos $\eta\colon M_1 \to \mathbb{R}$ pondo $\eta(p) = \varepsilon(p)/(1 + |\varphi'(p)|)$, para todo $p \in M_1$. Obteremos em seguida uma função contínua $\delta\colon M_2 \to \mathbb{R}$ tal que $0 < \delta(\varphi(p)) < \eta(p)$ para todo $p \in M_1$. Para isso, consideremos uma cobertura localmente finita $M_2 = \bigcup_{a\in A} K_\alpha$ por conjuntos compactos K_α. Como φ é própria, para cada $\alpha \in A$ a imagem inversa $\varphi^{-1}(K_\alpha)$ é compacta, logo $a_\alpha = \inf\{\eta(p); p \in \varphi^{-1}(K_\alpha)\}$ é > 0, salvo se $\varphi^{-1}(K_\alpha) = \emptyset$, em cujo caso poremos $a_\alpha = 1$. Pelo Corolário 1 da Proposição 1, existe $\delta\colon M_2 \to \mathbb{R}$ contínua tal que $0 < \delta(q) < a_\alpha$ para todo $q \in K_\alpha$. Dado qualquer $p \in M_1$, tem-se $\varphi(p) \in K_\alpha$ para algum α. Segue-se que $\delta(\varphi(p)) < a_\alpha \leq \eta(p)$, como queríamos.

Afirmamos que, dadas $g, f \in W^1(M_2;N)$, se $g \in W^1(f;\delta)$ então $g\varphi \in W^1(f\varphi;\varepsilon)$. Com efeito, de $|g - f| < \delta$ em M_2, segue-se trivialmente que $|g\varphi - f\varphi| < \delta\varphi < \varepsilon$ em M_1. Além disso, de $|g' - f'| < \delta$ em M_2 concluimos que, em M_1 vale:

$$|(g\varphi)' - (f\varphi)'| = |g'\varphi \cdot \varphi' - f'\varphi \cdot \varphi'| \leq |g'\varphi - f'\varphi| \cdot |\varphi'| <$$
$$< |g'\varphi - f'\varphi| \cdot (1 + |\varphi'|) < \delta \cdot (1 + |\varphi'|) < \varepsilon.$$

A Proposição 3 está demonstrada.

Corolário 1. Se a aplicação $\varphi\colon M_1 \to M_2$, de classe C^1, for um homeomorfismo sobre um subconjunto fechado de M_2, então $\varphi^*\colon (M_2; N) \to W^1(M_1; N)$ será contínua.

Com efeito, neste caso φ é própria.

Corolário 2. *A topologia de $W^1(M; N)$ não depende da métrica riemaniana tomada em M.*

Com efeito, se g, h são métricas riemanianas de classe C^0 em M, ponhamos $M_1 = (M, g)$ e $M_2 = (M, h)$. A aplicação identidade $i\colon M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo, o qual induz, pela Proposição 1, um homeomorfismo $i^*\colon W^1(M_2; N) \to W^1(M_1; N)$. Como $i^* =$ identidade, vemos que as topologias de $W^1(M_1; M)$ e $W^1(M_2; M)$ são a mesma.

Observações:

1) Segue-se da Proposição 2 que $\varphi^*\colon C^1(M_2; N) \to C^1(M_1; N)$ é contínua, seja qual for $\varphi\colon M_1 \to M_2$ de classe C^1.

2) O leitor atento observará que $W^1(M; N)$ possui uma estrutura uniforme natural, definida pelos conjuntos $W^1(\varepsilon) = \{(f, g) \in W^1(M; N) \times W^1(M; N); |f - g|_1 < \varepsilon\}$. (Vide ETG, pag. 145.) Em relação a esta estrutura uniforme, a aplicação φ^* da Proposição 3 é uniformemente contínua.

Proposição 4. *Uma aplicação $\varphi\colon N_1 \to N_2$, de classe C^1, induz, através da regra $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$, uma aplicação contínua $\varphi_*\colon W^1(M; N_1) \to W^1(M; N_2)$.*

Antes, um resultado auxiliar:

Lema 1. *Fixemos uma cobertrua localmente finita $\mathcal{C} = (K_\alpha)_{\alpha \in A}$ da variedade M, por meio de conjuntos compactos K_α. Uma base de vizinhanças para $f \in W^1(M; N)$ pode ser obtida considerando-se todas as famílias $\tilde{a} = (a_\alpha)_{\alpha \in A}$ de número reais $a_\alpha > 0$, com*

índices em A, e pondo, para cada família $\tilde{a}$,

$$W^1(f;\tilde{a})=\{g\in W^1(M;N); |g-f|_1 < a_\alpha \text{ em } K_\alpha \text{, para todo } \alpha\in A\}.$$

Demonstração: Seja $W^1(f;\varepsilon)$ uma vizinhança básica de f. Definamos $\tilde{a} = (a_\alpha)_{\alpha\in A}$ pondo $a_\alpha = \inf\{\varepsilon(p); p \in K_\alpha\}$. Como ε é contínua e K_α é compacto, temos $a_\alpha > 0$ para todo $\alpha \in A$. Além disso, $W^1(f;\tilde{a}) \subset W^1(f;\varepsilon)$. Reciprocamente, dada a família $\tilde{a}$, pelo Corolário 1 da Proposição 1, existe uma função contínua $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $p \in K_\alpha = 0 < \varepsilon(p) < a_\alpha$. Logo $W^1(f;\varepsilon) \subset W^1(f;\tilde{a})$.

Demonstração da Proposição 4: Seja $f \in W^1(M;N_1)$. Fixemos uma cobertura localmente finita $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ por compactos. Para provar a continuidade de φ_* no ponto f, dada uma seqüência $\tilde{b} = (b_i)$ de números reais positivos, devemos achar uma seqüência $\tilde{a} = (a_i)$, $a_i > 0$, tal que $|g-f|_1 < a_i$ em $K_i \Rightarrow |\varphi\circ g - \varphi\circ f|_1 < b_i$, $i = 1,2,3,\dots$.

Isto será feito em duas etapas.

1ª etapa - Para cada $i = 1,2,3,\dots$ seja L_i uma vizinhança compacta de $f(K_i)$. Então $a_i = \operatorname{dist}[f(K_i), N_1 - L_i]$ é um número positivo tal que $|f-g| < a_i$ em $K_i \Rightarrow g(K_i) \subset L_i$.

Como φ é uniformemente contínua em L_i, podemos diminuir, se necessário, os números positivos a_i, de modo que $x, y \in L_i$, $|x-y| < a_i \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < b_i$.

Resulta daí que $|g-f| < a_i$ em K_i implica $|\varphi g - \varphi f| < b_i$ em K_i .

2ª etapa - Analisemos agora a expressão $|(\varphi g)' - (\varphi f)'|$. Sejam $N_1 \subset \mathbb{R}^r$ e $N_2 \subset \mathbb{R}^s$. Usando a Aplicação 3, Capítulo VIII, podemos supor que φ é a restrição de uma aplicação $\Phi\colon V \to \mathbb{R}^s$, de classe C^1 onde V é uma vizinhança aberta de N_1 em $\mathbb{R}^r$.

[A razão para introduzirmos Φ é que, para $p, q \in N_1$, $p \neq q$, $\Phi'(p) - \Phi'(q) \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ faz sentido, enquanto que $\varphi'(p) - \varphi'(q)$ nada significa.]

Se $g \in W^1(M; N_1)$ temos

$$\begin{aligned} |(\varphi f)' - (\varphi g)'| &= |(\Phi f)' - (\Phi g)'| = |\Phi' f \cdot f' - \Phi' g \cdot g'| \\ &= |\Phi' f \cdot f' - \Phi' g \cdot f' + \Phi' g \cdot f' - \Phi' g \cdot g'| \\ &\leq |\Phi' f - \Phi' g| \cdot |f'| + |\Phi' g| \cdot |f' - g'|. \end{aligned}$$

Vamos impor, agora, as restrições finais aos a_i.

Como $\Phi' \colon L_i \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$ é uniformemente contínua, podemos supor que $x, y \in L_i$, $|x - y| < a_i \Rightarrow |\Phi'(x) - \Phi'(y)| \cdot |\sup\limits_{K_i} |f'| < \dfrac{b_i}{2}\cdot$

Podemos supor também que $a_i \cdot \sup\limits_{L_i} |\Phi'| < \dfrac{b_i}{2}\cdot$

Então, se $g \in W^1(M; N_1)$ é tal que $|g - f|_i < a_i$ em K_i, tem-se

$$\begin{aligned} |(\Phi g)' - (\Phi f)'| &\leq |\Phi' g| \cdot |g' - f'| + |\Phi' g - \Phi' f| \cdot |f'| \\ &< \frac{b_i}{2} + \frac{b_i}{2} = b_i\,. \end{aligned}$$

Corolário. *A topologia de $W^1(M; N)$ não depende da maneira como N se acha mergulhada no espaço euclidiano.*

Sejam $\varphi_1 \colon N \to \mathbb{R}^r$ e $\varphi_2 \colon N \to \mathbb{R}^s$ dois mergulhos de classe C^1 de N em espaços euclidianos. Ponhamos $N_1 = \varphi_1(N)$, $N_2 = \varphi_2(N)$. A aplicação $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon N_1 \to N_2$ é um difeomorfismo de classe C^1, logo $\varphi_* \colon W^1(M; N_1) \to W^1(M; N_2)$ é contínua e, na realidade, é um homeomorfismo pois $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

4 Estabilidade de certas aplicações diferenciáveis

A topologia de Whitney de classe C^1 é suficientemente fina para permitir a estabilidade de certas propriedades geométrico-diferenciais e suficentemente grossa para admitir que aplicações com propriedades desejáveis formem um conjunto denso. Por exemplo, mostraremos adiante que se uma aplicação de classe C^1 é uma imersão, uma submersão, um mergulho, um difeomorfismo ou transversal a uma subvariedade fechada, ela manterá a mesma propriedade após sofrer uma pequena perturbação no sentido desta topologia. Na seção seguinte, mostraremos que se $M, N \in C^k$ então as aplicações C^k formam um subconjunto denso em $W^1(M; N)$.

Proposição 5. *As imersões de classe C^1 formam um subconjunto aberto $\mathrm{Im}^1(M; N) \subset W^1(M; N)$. Também as submersões formam um aberto $\mathrm{Sub}^1(M; N) \subset W^1(M; N)$.*

Demonstração: Mostremos primeiro um resultado preliminar: sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $K \subset U$ compacto. Seja $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 tal que $f|K$ é uma imersão (isto é, $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora para todo $x \in K$). Então existe $\eta > 0$ tal que $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $|g - f|_1 < \eta$ em $K \Rightarrow g|K$ é uma imersão. Com efeito, indiquemos com $\mathcal{O} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ o subconjunto aberto formado por todas as transformações lineares injetivas de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $f'\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é contínua e $f'(K) \subset \mathcal{O}$. Como $f'(K)$ é compacto e $\mathcal{O}$ é aberto, tem-se $\eta = \mathrm{dist}[f'(K), \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) - \mathcal{O}] > 0$. Assim, se $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ e $|g - f|_1 < \eta$ em K então $g'(K) \subset \mathcal{O}$, o que prova o resultado preliminar. Daí, e da Proposição 2, segue-se que se $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ é um sistema de coordenadas em M, se $K \subset U$ é compacto e se $f\colon M \to N \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^1, é uma imersão em K, então existe $\delta > 0$ tal que toda aplicação $g\colon M \to N$, de classe C^1, com

$|g - f|_1 < \delta$ em K, é uma imersão em K. (Basta tomar $\varphi = x^{-1}$ na Proposição 2.)

Completemos agora a demonstração. Seja $M = \bigcup U_i$ uma cobertura localmente finita de M como na Proposição 1 do Capítulo VIII. Fixemos a cobertura localmente finita $M = \bigcup \overline{V}_i$ para definir a topologia de $W^1(M; N)$ (ver Lema 1). Pelo que vimos, para cada índice i existe um $a_i > 0$ tal que $g \in W^1(M; N)$ com $|g - f|_1 < a_i$ em $\overline{V}_i$ implica ser $g|\overline{V}_i$ uma imersão. Ponhamos $\tilde{a} = (a_i)$. Então a vizinhança $W^1(f, \tilde{a})$ de f em $W^1(M; N)$ consiste apenas em imersões. A afirmação relativa a submersões se demonstra exatamente da mesma maneira.

Observações:

1) A menos que M seja compacta, as imersões $f\colon M \to N$ não formam um subconjunto aberto de $C^1(M; N)$. (A topologia da convergência compacta C^1 não é suficientemente fina para detectar a estabilidade das imersões.) Por exemplo, sejam $f = \mathrm{id} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Existe sempre uma aplicação $g \in V^1(f; K, \varepsilon)$ que não é uma imersão.

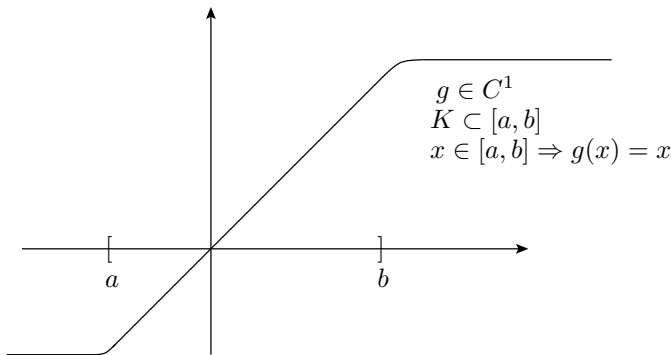



Figura 10.3.

2) O conjunto das imersões $f\colon M \to N$ pode muito bem ser vazio. Este é o caso quando $\dim M > \dim N$, por exemplo.

Proposição 6. *Os mergulhos de classe C^1, $f\colon M \to N$, formam um aberto* $\mathrm{Merg}^1(M;N) \subset W^1(M;N)$.

Demonstração: Inicialmente, um resultado preliminar: sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $K \subset U$ compacto e convexo, e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 tal que $f|K$ é um mergulho. Então existe $\eta > 0$ tal que toda $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 com $|g-f|_1 < \eta$ em K é um mergulho de K.

Com efeito, pelo resultado preliminar da Proposição 5, existe $\eta' > 0$ tal que $|g-f|_1 < \eta'$ em $K \Rightarrow g|K$ uma imersão. Mostraremos agora que, diminuindo η' se necessário, $g|K$ será injetiva. Pela Proposição da Seção 5, Capítulo I, existem números $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|f(x)-f(y)| \geq c|x-y|$ para quaisquer $x \in K$, $y \in U$, com $|x-y| < \delta$. No conjunto compacto $A = \{(x,y) \in K \times K; |x-y| \geq \delta\}$, a função contínua $(x,y) \mapsto |f(x)-f(y)|$ só assume valores positivos. Logo existe um número $d > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| \geq d$ para todo $(x,y) \in A$. Seja $\eta = \min\left\{\eta', \frac{c}{2}, \frac{d}{3}\right\}$. Afirmamos que se $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e $|g-f|_1 < \eta$ em K, então $g|K$ é injetiva. Com efeito, sejam $x, y \in K$, $x \neq y$. Escrevamos $h = g - f$. Temos $|h(z)| < \eta$ e $|h'(z)| < \eta$ para todo $z \in K$. Como K é convexo, podemos aplicar a desigualdade do valor médio e obter $|h(x)-h(y)| \leq \eta \cdot |x-y|$, para quaisquer $x, y \in K$. Para mostrar que $g(x) \neq g(y)$, notemos que

$$|f(x)-f(y)| \leq |g(x)-g(y)| + |g(y)-f(y)-(g(x)-f(x))|.$$

Daí se seguem:

(1) $|g(x)-g(y)| \geq |f(x)-f(y)| - |h(x)-h(y)|$;

(2) $|g(x)-g(y)| \geq |f(x)-f(y)| - |h(x)| - |h(y)|$.

Consideraremos dois casos

Primeiro: $0 < |x-y| < \delta$. Então, usando (1), obtemos

$$|g(x)-g(y)| \geq c|x-y| - \frac{c}{2}\,|x-y| = \frac{c}{2}\,|x-y| > 0.$$

Segundo: $|x-y| \geq \delta$. Então $(x,y) \in A$. Usando (2), obtemos

$$|g(x)-g(y)| \geq d - \frac{d}{3} - \frac{d}{3} = \frac{d}{3} > 0.$$

Em qualquer hipótese, temos $g(x) \neq g(y)$.

Completemos agora a demonstração. Seja $f\colon M \to N \subset \mathbb{R}^n$ um mergulho. Tomamos $M = \bigcup U_i$, uma cobertura localmente finita de M, como na Proposição 1 do Capítulo VIII, e fixamos a cobertura localmente finita $M = \bigcup \overline{V}_i$ para definir a topologia de $W^1(M;N)$. (Vide Lema 1.) Do que acabamos de provar e da Proposição 2, resulta que, para cada i, existe $a_i > 0$ tal que $g \in W^1(M;N)$, $|g-f|_1 < a_i$ em $\overline{V}_i = g|\overline{V}_i$ é um mergulho. Como f é um homeomorfismo de M sobre $f(M)$, temos $d_i = \text{dist}(f(\overline{W}_i), f(M-V_i)) > 0$

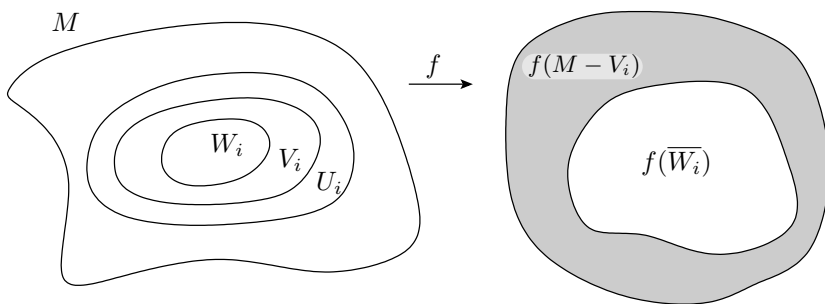



Figura 10.4.

Escolhamos os a_i's de tal modo que $a_i < d_i/3$ e $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$. Afirmamos que $W^1(f;\tilde{a}) \subset \text{Merg}^1(M;N)$. É claro que $W^1(f;\tilde{a}) \subset \text{Im}^1(M;N)$. Mostremos ainda que se $g \in W^1(f;\tilde{a})$ então g é injetiva. Sejam $p,q \in M$ com $p \neq q$. Ora, $p \in W_i$ para algum i. Se $q \in V_i$, então $g(p) \neq g(q)$. Se $q \in M - V_i$ então $|f(p)-f(q)| \geq d_i$.

Logo

$$\begin{aligned}|g(p)-g(q)| &\geq |f(p)-f(q)|-|f(p)-g(p)|-|f(q)-g(q)| \\ &\geq d_i - d_i/3 - d_i/3 > 0.\end{aligned}$$

Resta mostrar que toda aplicação $g \in W^1(f;\tilde{a})$ é um homeomorfismo de M sobre $g(M)$. Em outras palavras, se (p_n) é uma seqüência em M com $g(p_n) \to g(p)$, $p \in M$ então necessariamente $p_n \to p$.

1ª hipótese - Existe um conjunto compacto $K \subset M$ contendo todos os pontos p_n. Neste caso, a afirmação é imediata, pois uma aplicação contínua e injetiva de um compacto é um homeomorfismo sobre sua imagem.

2ª hipótese - Não existe um conjunto compacto $K \subset M$ contendo todos os pontos p_n. Neste caso podemos encontrar uma subseqüência p'_n tal que para cada compacto $K \subset M$ existe apenas um número finito de valores de n com $p'_n \in K$. Ponhamos $i(n) = \inf\{i; p'_n \in \overline{V}_i\}$. Segue-se que $\lim\limits_{n\to\infty} i(n) = \infty$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i(n)} = 0$. Como $|f-g| < a_i$ em $\overline{V}_i$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} |f(p'_n)-g(p'_n)| = 0$, portanto $\lim\limits_{n\to\infty} f(p'_n) = g(p)$. Seja i tal que $p \in W_i$. Então, para todo n suficientemente grande, $p'_n \in M - V_i$ portanto $|f(p) - f(p'_n)| \geq d_i$. Segue-se que

$$d_i \leq \lim_{n\to\infty} |f(p) - f(p'_n)| = |f(p) - g(p)|.$$

Isto é uma contradição, pois $|f-g| < d_i/3$ em $\overline{V}_i$. A conclusão é que a 2ª hipótese não pode ocorrer e a demonstração está terminada.

Escólio da Proposição 6 - *Seja $K \subset M$ compacto. Se $f \in W^1(M;N)$ é tal que $f|K$ é um mergulho, então existe um número*

real $\delta > 0$ *tal que* $g \in W^1(M;N)$, $|g - f|_1 < \delta$ *em* $K = g|K$ *é um mergulho.*

Demonstração: Tomemos uma cobertura finita $K \subset W_1 \cup \cdots \cup W_r$, onde $W_i \subset V_i \subset U_i$, como na demonstração da Proposição 6. Em cada U_i, f é um mergulho e existe $a_i > 0$ tal que $|g - f|_1 < a_i$ em $\overline{V}_i = g|\overline{V}_i$ é um mergulho. Para cada $i = 1, \ldots, r$, $b_i = \operatorname{dist}[f(\overline{W}_i \cap K), K - V_i] > 0$ pois $f|K$ é um homeomorfismo. Seja $\delta > 0$ um número menor do que todos os a_i e os $b_i/3$. Se $|g - f|_1 < \delta$ em K então $g|K$ é um mergulho. (Isto se mostra exatamente como na demonstração da Proposição 6.)

Proposição 7. *O conjunto de todos os difeomorfismos* $f : M^m \to N^n$ *(sobre* N*!) é um aberto* $\operatorname{Dif}^1(M;N) \subset W^1(M;N)$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que M e N são conexas. Seja $M = \bigcup U_i$ cobertura localmente finita de M como na Proposição 1, Capítulo VIII. Dado um difeomorfismo $f \in \operatorname{Dif}^1(M;N)$, este possui uma vizinhança $W^1(f;\tilde{a})$ que consiste apenas em mergulhos de M em N. Afirmação: se tomamos os a_i de modo que $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$ então toda aplicação $g \in W^1(f;\tilde{a})$ é sobre N. Como N é conexa e g é uma aplicação aberta, é suficiente mostrar que $g(M)$ é fechado em N. Consideremos pois uma seqüência $g(p_n) \to q \in N$. Queremos mostrar que existe $p \in M$ tal que $g(p) = q$. Em princípio, há duas possibilidades.

Primeira: A seqüência (p_n) tem uma subseqüência convergente $p'_n \to p \in M$. Neste caso, $\lim\limits_{n\to\infty} g(p'_n) = g(p)$ logo $q = g(p) \in g(M)$.

Segunda: A seqüência (p_n) não tem nenhuma subseqüência convergente. Vamos provar que esta hipótese não pode ocorrer.

Nenhum subconjunto compacto de M pode conter uma infinidade de termos p_n. Assim se $i(n) = \inf\{i; p_n \in \overline{V}_i\}$, tem-se $\lim\limits_{n} i(n) = \infty$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i(n)} = 0$. Isto implica que $0 \leq$

$\lim_{n\to\infty} |f(p_n) - g(p_n)| \leq \lim_{n\to\infty} a_{i(n)} = 0$. Portanto $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = q$. Como f é sobre N, $q = f(p)$ para algum $p \in M$. Ora, f é um homeomorfismo, logo $f(p_n) \to f(p)$ acarreta $p_n \to p$, contradição.

Passemos agora ao caso geral. Dado um difeomorfismo $f\colon M \to N$, seja $M = \bigcup M_s$ a decomposição de M em componentes conexas. A decomposição de N pode ser escrita como $N = \bigcup N_s$, onde $f(M_s) = N_{s'}$. Para cada s, escolhamos um ponto $p_s \in N_s$; seja $q_s = f(p_s) \in N_{s'}$. Como cada $N_{s'}$ é aberto em N, tem-se $\text{dist}[q_s; N - N_{s'}] = c_s > 0$. Portanto, dado $g \in W^1(M; N)$, se $|g - f| < c_s$ em M_s, devemos ter $g(M_s) \subset N_{s'}$. Usando uma cobertura $M = \bigcup K_i$ por conjuntos compactos e conexos para definir a topologia de $W^1(M; N)$, cada K_i estará contido em alguma componente M_s. Assim, se exigimos que a seqüência $\tilde{a} = (a_i)$ seja tal que $a_i < c_s$ sempre que $K_i \subset M_s$, as aplicações $g \in W^1(f; \tilde{a})$ vão atender à condição $g(M_s) \subset N_{s'}$. A proposição segue-se portanto do primeiro caso.

Observação: O análogo da Proposição 6 não vale para $C^1(M; N)$. Por exemplo, a aplicação $\text{id}\colon B^2(1) \to B^2(1)$ não é ponto interior do subconjunto de $C^1(B(s); B(s))$ formado pelos difeomorfismos. A diferença é que na topologia de Whitney temos liberdade de considerar funções $\varepsilon\colon B(1) \to \mathbb{R}$ tais que $\varepsilon(x) \to 0$ quando x tende a um ponto do bordo. Assim, uma pequena perturbação (no sentido $W^1(M; N)$) de um difeomorfismo de M *sobre* N é obrigada a continuar *sobre* N.

Examinaremos agora a estabilidade das aplicações que são transversais a uma subvariedade fechada. Primeiro provaremos um lema.

Lema. *Seja K um subconjunto compacto da variedade riemaniana M. Dada uma aplicação $\lambda\colon M \to \mathbb{R}^s$, de classe C^1, da qual $0 \in \mathbb{R}^s$ é um valor regular, existe um numero real $\delta_K > 0$ tal que se*

$\mu\colon M \to \mathbb{R}^s$ é de classe C^1 com $|\mu - \lambda|_1 < \delta_K$ em K, então 0 é valor regular de $\mu|K$.

Demonstração: O conjunto U dos pontos $p \in M$ tais que $\lambda'(p)\colon TM_p \to \mathbb{R}^s$ tem posto s é um aberto contendo $\lambda^{-1}(0)$, restrito ao qual λ é uma submersão. Logo, podemos obter um aberto A, contendo $K \cap \lambda^{-1}(0)$, tal que $\overline{A}$ é um compacto contido em U e portanto $\lambda|\overline{A}$ é uma submersão. Além disso, $\lambda(K - A)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^s$, que não contém 0; daí $a = \text{dist}[\lambda(K - a), 0] > 0$. Além disso, existe $\delta > 0$ tal que se $\mu\colon M \to \mathbb{R}^s$ é de classe C^1 com $|\mu - \lambda|_1 < \delta$ em $\overline{A}$, então $\mu|\overline{A}$ é uma submersão. (Vide Proposição 5.) Ou seja, neste caso, todo $y \in \mathbb{R}^s$ é valor regular de $\mu|\overline{A}$. Por outro lado, $|\mu - \lambda|_1 < a$ em K implica $O \notin \mu(K - A)$. Assim, se pusermos $\delta_K = \min\{\delta, a\}$, veremos que $|\mu - \lambda|_1 < \delta_K$ em K implica que 0 é valor regular de $\mu|K$.

Proposição 8. *Seja S uma subvariedade fechada de N. Então o conjunto das aplicações $f\colon M \to N$ que são transversais a S é aberto em $W^1(M; N)$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{Z}$ uma cobertura de S por domínios de sistemas de coordenadas $y\colon Z \to \mathbb{R}^n$ tais que $y(Z \cap S) \subset \pi^{-1}(0)$, onde $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ projeta nas últimas s coordenadas (s = codimensão de S em N). Como S é fechada, podemos recobrir M por abertos U tais que $f(U) \cap S = \emptyset$ ou $f(U) \subset Z$ para algum $Z \in \mathcal{Z}$. Refinando esta cobertura, podemos admitir que $M = \bigcup U_i$ é localmente finita, com sistemas de coordenadas $x_i\colon U_i \to \mathbb{R}^m$, tais que $x_i(U_i) = B(3)$, mantendo-se ainda que $x_i(U_i) \subset N - S$, ou então $x_i(U_i) \subset Z$ para algum $Z \in \mathcal{Z}$. Usaremos a cobertura $M = \bigcup \overline{V}_i$ ($V_i = x_i^{-1}(B(2))$) para definir a topologia de $W^1(M; N)$. Dado i, se $f(U_i) \cap S = \emptyset$, então escolhemos $a_i > 0$ tal que $|f - g|_1 < a_i$ em $\overline{V}_i$ implique $g(\overline{V}_i) \cap S = \emptyset$. Isto é sempre possível porque então $f(\overline{V}_i)$ será um compacto, disjunto do fechado S em N. Logo g é

(trivialmente) transversal a S em $\overline{V}_i$. Se, porém, $f(U_i) \cap S \neq \emptyset$, então $f(U_i) \subset Z$ para algum $Z \in \mathcal{Z}$. Assim como f é transversal a S, (vide Lema, Seção 4, Capítulo VII) considerando o sistema de coordenadas $y\colon Z \to \mathbb{R}^n$ e a projeção $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, vemos que $0 \in \mathbb{R}^s$ é um valor regular da aplicação $\lambda = \pi \circ y \circ f\colon U_i \to \mathbb{R}^s$. Em virtude do Lema...., existe $\delta_i > 0$ tal que $|\pi \circ y \circ f - \pi \circ y \circ g|_1 < \delta_i$ em $\overline{V}_i$ implica que $0 \in \mathbb{R}^s$ é um valor regular de $\pi \circ y \circ g$. Mas, em virtude da Proposição 4, podemos achar $a_i > 0$ tal que $|g - f|_1 < a_i$ em $\overline{V}_i$ implica $|\pi \circ y \circ f - \pi \circ y \circ g|_1 < \delta_i$ em $\overline{V}_i$ e portanto que g é transversal a S em $\overline{V}_i$. A seqüência $\tilde{a} = (a_i)$ define portanto uma vizinhança $W^1(f; \tilde{a})$ de f constituida apenas por aplicações $g\colon M \to N$ que são transversais a S.

Observação: Se S não for fechada em N, as aplicações $f\colon M \to N$ que são transversais a S podem não constituir um conjunto aberto. Por exemplo, sejam $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, x^2); x > 0\}$. O leitor pode verificar que, arbitrariamente próximo da aplicação $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x, 0)$, existem aplicações $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que não são transversais a S, embora f o seja (trivialmente, pois $f(\mathbb{R}) \cap S = \emptyset$).

5 Aproximações em classe C^1

O Corolário 2 da Proposição 1 é um teorema de aproximação em classe C^0. Dadas uma aplicação $f\colon M \to \mathbb{R}^n$, de classe C^0 numa variedade de classe C^k, e uma função contínua positiva $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$, encontramos uma cobertura aberta localmente finita $M = \bigcup V_i$ e, para cada i, um ponto $p_i \in V_i$ tal que $|f(p) - f(p_i)| < \varepsilon(p)$ para todo $p \in V_i$. Logo, a constante $f(p_i)$ é uma ε-aproximação de $f(p)$ em V_i. Tomando uma partição da unidade $\sum \varphi_i = 1$, de classe C^k, com $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset V_i$, formamos a

média ponderada $g(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(p) f(p_i)$ dos valores $f(p_i)$ e isto nos proporcionou uma aplicação $g \colon M \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k, com $|g(p) - f(p)| < \varepsilon(p)$ para todo $p \in M$.

Nesta seção obteremos um teorema de aproximação em classe C^1 segundo o qual, se M é uma variedade de classe C^k, então, dadas uma aplicação $f \colon M \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e uma função contínua positiva $\varepsilon \colon M \to \mathbb{R}$, existe uma aplicação de classe C^k, $g \colon M \to \mathbb{R}^n$, com $|g(p) - f(p)| < \varepsilon(p)$ e $|g'(p) - f'(p)| < \varepsilon(p)$ para todo $p \in M$.

Com este objetivo, vamos introduzir um processo mais refinado de calcular médias ponderadas, que usa integrais em vez de somas. Tal processo chama-se *regularização* de uma função.

Dados um conjunto $K \subset \mathbb{R}^m$ e um número $\eta > 0$, indiquemos com $V_\eta(K) = \bigcup_{x \in K} B(x; \eta)$ a união de todas as bolas abertas com centro em um ponto de K e raio η.

Se K está contido em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, dadas as aplicações de classe C^r $f, g \colon U \to \mathbb{R}^n$ e um número $\delta > 0$, escrevemos "$|f - g|_r < \delta$ em K" significando que $|f^{(j)}(x) - g^{(j)}(x)| < \delta$ para todo $x \in K$ e $j = 0, 1, \ldots, r$. Como sempre, a 0-ésima derivada de uma função é a própria função.

Proposição 8. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $K \subset U$ compacto. Dados um número $\delta > 0$ e uma aplicação $f \colon U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^r, existe uma aplicação $g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, de classe C^∞, tal que $|g - f|_r < \delta$ em K $(0 \leq r < \infty)$.*

Demonstração: Seja $\eta > 0$ tal que $\overline{V_\eta(K)} \subset U$.

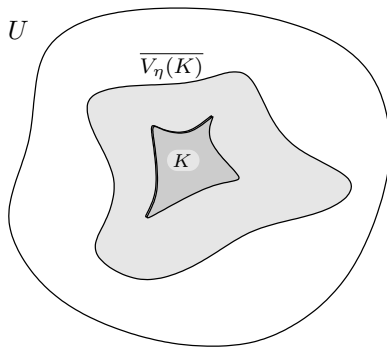



Figura 10.5.

Pela Aplicação 4, Capitulo VIII, existe $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, de classe C^r, tal que $h = f$ em $\overline{V_\eta(K)}$. Se η for tomado suficientemente pequeno então, para $j = 0,\, 1, \ldots, r$,

$$\sup\{|h^{(j)}(x+y) - h^j(x)|; x \in K, |y| \leq \eta\} < \delta.$$

Seja $\varphi_\eta\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa, de classe C^∞, tal que $\varphi_\eta(y) = 0$ quando $|y| \geq \eta$ e tal que $\displaystyle\int \varphi_\eta = 1$. Definamos $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$g(x) = \int \varphi_\eta(y) h(x+y)\, dy = \int \varphi_\eta(z-x) h(z)\, dz.$$

A igualdade destas integrais resulta da mudança de variáveis óbvia $z = x + y$. Pela regra de Leibniz (ver AER$^{\text{n}}$, pag. 66) temos

$$g^{(j)}(x) = \int \varphi_\eta(y) h^{(j)}(x+y)\, dy,\ j = 0, 1, \ldots, r \quad \text{e}$$
$$g^{(j)}(x) = (-1)^j \int \varphi_\eta^{(j)}(z-x) h(z)\, dz,\ \text{para todo } j.$$

Como $\varphi_\eta \in C^\infty$ vemos, pela segunda relação, que $g \in C^\infty$. Além disso, como $\displaystyle\int \varphi_\eta = 1$, para cada $x \in K$ e para $j = 0, 1, \ldots, r$

tem-se

$$\begin{aligned}|g^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| &= |g^{(j)}(x) - h^{(j)}(x)| \\ &= \Big| \int \varphi_\eta(y)[h^{(j)}(x+y) - h^{(j)}(x)]dy \Big| \\ &\leq \sup_{|y|\leq\eta} |h^{(j)}(x+y) - h^{(j)}(x)| \cdot \int \varphi_\eta(y)\, dy < \delta.\end{aligned}$$

A demonstração do nosso "teorema de aproximação em classe C^1" se baseia no seguinte lema, onde $B(r)$ denota a bola aberta de centro 0 e raio r no $\mathbb{R}^r$.

Lema. *Seja $f\colon B(3) \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1. Dado um número real $\delta > 0$, existe uma aplicação $h\colon B(3) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, tal que*

(1) *$h = f$ em $B(3) - B(2)$;*

(2) *$|h - f|_1 < \delta$ em $B(3)$;*

(3) *$h \in C^\infty$ em $B(1)$.*

Além disso, em parte alguma de $B(3)$ h é menos diferenciável do que f.

Demonstração: Seja $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função auxiliar de classe C^∞, com $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(\overline{B(1)}) = 1$ e $\varphi[B(3) - B(2)] = 0$. Seja $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^∞ tal que $|g - f|_1 < \delta/2A$ em $\overline{B(2)}$, onde $A \geq 1 + |\varphi|_1$ (isto é, $1 + |\varphi(x)| \leq A$ e $1 + |\varphi'(x)| \leq A$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$).

Definamos $h = f + \varphi \cdot (g - f)\colon B(3) \to \mathbb{R}^n$, isto é, $h(x) = f(x) + \varphi(x) \cdot (g(x) - f(x))$ para todo $x \in B(3)$. Temos:

(1) Em $B(3) - B(2)$, $h = f$.

(2) $|h - f| = |\varphi|\, |g - f| \leq |g - f| < \delta/2A < \delta$

$$\begin{aligned}|(h - f)'| &= |\varphi'(g - f) + \varphi(g' - f')| \\ &\leq |\varphi'|\, |g - f| + |\varphi|\, |g' - f'| < \delta.\end{aligned}$$

(3) Em $B(1)$, $h(x) = g(x)$, logo $h \in C^\infty$ em $B(1)$.

Além disso, como $h = f + \varphi \cdot (g - f)$ vemos que h é não menos diferenciável do que f.

Proposição 9. *Sejam M uma variedade e $N \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície, ambas de classe C^k. As aplicações de classe C^k formam um subconjunto denso em $W^1(M; N)$.*

Demonstração: Dadas uma aplicação $f \colon M \to N$, de classe C^1, e uma função contínua $\varepsilon \colon M \to (0, \infty)$, devemos encontrar $g \colon M \to N$, de classe C^k, com $|g - f|_1 < \varepsilon$ em M.

Fixemos uma cobertura de N por domínios de sistemas de coordenadas $y \colon Z \to \mathbb{R}^n$. Podemos recobrir M por conjuntos abertos U, com fecho compacto, tais que $f(\overline{U})$ está contido em algum Z. Pela Proposição 1 do Capítulo VIII, esta cobertura aberta de M pode ser refinada por outra, enumerável, localmente finita e formada por domínios de sistemas de coordenadas $x_i \colon U_i \to \mathbb{R}^m$ tais que $x_i(U_i) = B(3)$. Para cada i, existe portanto um sistema de coordenadas $y_i \colon Z_i \to \mathbb{R}^m$ tal que o conjunto compacto $f(\overline{U}_i)$ está contido em Z_i. Como sempre, $V_i = x_i^{-1}(B(2))$, $W_i = x_i^{-1}(B(1))$ e os W_i cobrem M. Podemos supor que cada x_i estende-se continuamente ao fecho $\overline{U}_i$.

Construiremos agora, por indução, uma seqüência de aplicações $f_0, \dots, f_i, \dots$ de M em N nas seguintes condições:

(1) $f_0 = f$;

(2) $f_i = f_{i-1}$ em $M - V_i$;

(3) f_i é de classe C^k em $W_1 \cup \dots \cup W_i$;

(4) $|f_i - f_{i-1}|_1 < \dfrac{c}{2^i}$ em M;

(5) $f_i(\overline{U}_j) \subset Z_j$ para todo j.

Seja $f_0 = f$. Suponhamos definidas $f_0, f_1, \dots, f_{i-1}$, com aquelas propriedades.

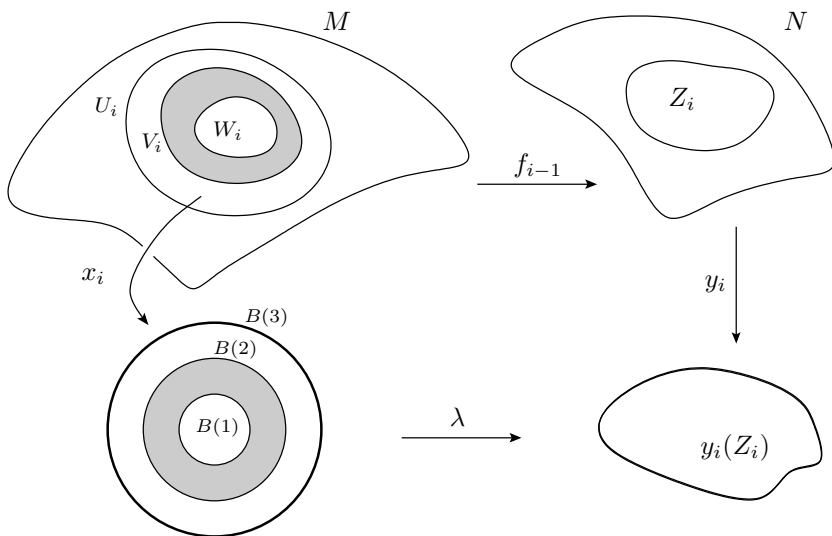



Figura 10.6.

A fim de obter f_i, consideremos os sistemas de coordenadas $x_i\colon U_i \to \mathbb{R}^m$, $y_i\colon Z_i \to \mathbb{R}^n$ ($x_i(U_i) = B_3$, $f_{i-1}(\overline{U}_i) \subset Z_i$).

Pelas Proposições 2 e 4, existe $\delta > 0$ tal que, se $\lambda, \mu\colon B(3) \to y_i(Z_i)$ são aplicações de classe C^1 com $|\lambda - \mu|_1 < \delta$ em $\overline{B(2)}$, então $|y_i^{-1} \circ \lambda \circ x_i - y_i^{-1} \circ \mu \circ x_i|_1 < \varepsilon/2^i$ em $\overline{V}_i$.

Ponhamos $\lambda = y_i \circ f_{i-1} \circ (x_i)^{-1}\colon B(3) \to y_i(Z_i) \subset \mathbb{R}^n$.

Pelo lema precedente, existe $\mu\colon B(3) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, com $\mu = 1$ em $B(3) - B(2)$, $\mu \in C^k$ sempre que $\lambda \in C^k$, $\mu \in C^\infty$ em $B(1)$ e $|\mu - \lambda|_1 < \delta$ em $B(3)$.

Definimos $f_i\colon M \to N$ pondo $f_i = f_{i-1}$ em $M - V_i$ e $f_i = y_i^{-1} \circ \mu \circ x_i$ em U_i. As condições 1) a 4) são imediatamente verificadas para f_i. Quando à condição 5), observemos que apenas um número finito de conjuntos $\overline{U}_j$ intersetam $\overline{U}_i$ pois $\overline{U}_i$ é compacto e a cobertura $(\overline{U}_1, \overline{U}_2, \dots)$ é localmente finita. Para cada um desses $\overline{U}_j$, o compacto $K_j = \lambda(x_i(\overline{U}_j \cap \overline{U}_i))$ está contido no

aberto $A_j = y_i(Z_j \cap Z_i)$. Logo $\rho_j = \operatorname{dist}(K_j, \mathbb{R}^n - A_j) > 0$. Se tomarmos o cuidado de exigir que $\delta < \rho_j$ para todos os índices j tais que $\overline{U}_j \cap \overline{U}_i \neq \emptyset$, então teremos a condição $f_i(\overline{U}_j) \subset Z_j$ satisfeita para todos os valores $j = 1, 2, 3 \ldots$. A definição indutiva da seqüência $f_0, f_1, \ldots, f_i, \ldots$ está portanto completa.

Todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança aberta W_s que interseta apenas um número finito dos conjuntos V_j. Seja i o mais alto índice tal que $W_s \cap V_i \neq \emptyset$. Então $i \geq s$, donde $f_i \in C^k$ em W_j. Também $j > i = W_s \subset M - V_j$, e portanto $f_i = f_{i+1} = f_{i+2} = \ldots$ em todos os pontos do aberto W_s. Logo tem sentido definir $g\colon M \to N$ pondo $g(p) = \lim_{i\to\infty} f_i(p)$ para cada $p \in M$. Além disso, $g \in C^k$ pois todo $p \in M$ possui uma vizinhança V_s na qual g coincide com uma aplicação $f_i \in C^k$. Finalmente, em W_s temos

$$|g - f|_i = |f_i - f_0|_1 < |f_i - f_{i-1}|_1 + |f_{i-1} - f_{i-2}|_1 + \cdots + \\ + |f_1 - f_0|_1 < \sum_{r=1}^{i} \frac{\varepsilon}{2^r} < \varepsilon,$$

o que completa a demonstração.

Corolário. *As aplicações $f\colon M \to N$ de classe C^k formam um subconjunto denso de $W^0(M; N)$.*

Proposição 10. *Seja M uma variedade de classe C^k $(k \geq 1)$. Suponha que $f \in W^1(M; \mathbb{R}^s)$ é um mergulho. Então em toda vizinhança de f existem mergulhos $g\colon M \to \mathbb{R}^s$ tais que*

(i) *Em parte alguma de M, g é menos diferenciável do que f.*

(ii) *$g(M)$ é uma superfície de classe C^∞ em $\mathbb{R}^s$.*

Demonstração: Vamos tomar como modelo a prova da proposição anterior. Seja $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \ldots)$ uma cobertura localmente

finita de M por domínios de sistemas de coordenadas $x_i\colon U_i \to B^m(3)$ tais que, pondo $V_i = x_i^{-1}(B(2))$, $W_i = x_i^{-1}(B(1))$ os W_i's cobrem M. Dada uma função contínua $\varepsilon\colon M \to (0,\infty)$ podemos admitir, pela Proposição 6, que $W^1(f;\varepsilon)$ é uma vizinhança de f em $W^1(M;\mathbb{R}^s)$ consistindo apenas em mergulhos.

Para obter uma aplicação $g \in W^1(f;\varepsilon)$ satisfazendo (i) e (ii) construiremos, por indução, uma seqüência de aplicações $f_0,\dots,f_i,\dots$ de M em $\mathbb{R}^s$ nas seguintes condições:

(1) $f_0 = f$;

(2) $f_i = f_{i-1}$ em $M - V_i$;

(3) $f_i(W_1 \cup \cdots \cup W_i)$ é uma superfície de classe C^∞ em $\mathbb{R}^s$;

(4) $|f_i - f_{i-1}|_1 < \varepsilon/2^i$ em M.

(5) em parte alguma de m, f_i é menos diferenciável do que f_{i-1}.

Seja $f_0 = f$. Suponhamos definidas $f_0,\dots,f_{i-1}$ com aquelas propriedades.

A fim de obter f_i ponhamos $a = \inf\{\varepsilon(p)/2^i; p \in \overline{V}_i\}$. Existe $b > 0$ tal que $|\lambda \circ x_i - \mu \circ x_i|_1 < a$ em $\overline{V}_i$ se $\lambda,\mu\colon B(3) \to \mathbb{R}^s$ são aplicações de classe C^1 com $|\lambda - \mu|_1 < b$ em $\overline{B(2)}$ [cf. Proposição 2].

Seja $\lambda = f_{i-1} \circ (x_i)^{-1}\colon B(3) \to \mathbb{R}^s$. Pelo lema que precede a Proposição 8, existe uma aplicação $\mu\colon B(3) \to \mathbb{R}^s$ tal que $\mu = \lambda$ em $B(3) - B(2)$, $\mu \in C^\infty$ em $B(1)$, $|\mu - \lambda|_1 < b$ em $B(3)$ e μ não é menos diferenciável do que λ. Seja $f_i = \mu \circ x_i$ em U_i e $f_i = f_{i-1}$ em $M - V_i$.

É fácil de verificar que as condições (1) a (5) são satisfeitas. Para completar a demonstração basta definir $g = \lim\limits_{i\to\infty} f_i$.

Observação: Mostraremos no capítulo seguinte que, para toda variedade M de classe C^1, existe um mergulho $f\colon M \to \mathbb{R}^s$, de M em algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^s$. Pela Proposição 9, esse mergulho

pode ser tomado de modo que $f(M)$ seja uma superfície de classe C^∞. Então considerando as parametrizações locais $\varphi \in C^\infty$ em $f(M)$, as aplicações $\varphi^{-1} \circ f$ constituirão um atlas (máximo) C^∞ em M, contido no atlas original de M, o qual era apenas de classe C^1.

6 Topologias de classe C^r (*)

Sejam M, N variedades de classe C^k e r um inteiro, $0 \leq r \leq k$. No conjunto das aplicações $f\colon M \to N$, de classe C^k, introduziremos agora uma topologia segundo a qual uma vizinhança de f é constituida pelas aplicações cujos valores, juntamente com os valores de suas derivadas sucessivas até a ordem r, estão próximos dos valores correspondentes de f. Isto é o que se chama uma "topologia de classe C^r."

Nas seções anteriores, estudamos a topologia de Whitney de classe C^1, que origina os espaços $W^1(M;N)$. Para questões de estabilidade (isto é, para mostrar que certos conjuntos são abertos), W^1 é bastante útil pois um grande número de conceitos diferenciais dependem apenas da derivada primeira e, além disso, como a aplicação identidade $W^r \to W^1$ é contínua, todo aberto em $W^1(M;N)$ é também aberto em $W^r(M;N)$. Por outro lado, para questões de aproximação, (ou seja, para provar que certos conjuntos são densos) não basta provar isto em classe C^1.

Apresentaremos a seguir a topologia de Whitney de classe C^r. Inicialmente, estabeleceremos alguns fatos no espaço euclidiano.

Seja $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^r, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Dado um compacto $K \subset U$, a *norma de classe*

(*) A leitura desta seção pode ser adiada sem prejuízo para a continuidade do entendimento.

C^r *de* f *em* K é o número $|f|_{K,r}$, definido como o maior dos $r+1$ números reais abaixo:

$$\sup_{x\in K}|f(x)|, \sup_{x\in K}|f'(x)|, \ldots, \sup_{x\in K}|f^{(r)}(x)|.$$

Às vezes escreveremos "$|f|_r < \varepsilon$ em K" para significar $|f|_{K,r} < \varepsilon$.

Lema 1. *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ *abertos,* $\varphi\colon U \to V$ *de classe* C^r *e* $K \subset U$ *compacto. Existe um número real* $A > 0$ *tal que, para toda* $f\colon V \to \mathbb{R}^s$ *de classe* C^r*, tem-se* $|f\varphi|_{K,r} \leq A \cdot |f|_{\varphi(K),r}$ *.*

Demonstração: Para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, a i-ésima derivada da aplicação composta $f \circ \varphi$ tem a expressão abaixo. (Vide Capítulo I, seção 4.)

$$(f \circ \varphi)^{(i)} = \sum_{\substack{1\leq k\leq i \\ i_1+\cdots+i_k=i}} n(i_1, \ldots, i_k) f^{(k)}\varphi \cdot \left(\varphi^{(i_1)}, \ldots, \varphi^{(i_k)}\right).$$

Segue-se que, em cada ponto $x \in K$, a aplicação i-linear $(f \circ \varphi)^{(i)}$ tem sua norma sujeita à desigualdade:

$$|(f\varphi)^{(i)}| \leq N_i \cdot |f|_{\varphi(K),i} \cdot \left(|\varphi|_{K,i}\right)^i,$$

onde $N_i = \sum n(i_1, \ldots, i_k)$, $i_1+\cdots+i_k = i$. Portanto, se tomarmos $A \geq \max\limits_{1\leq i\leq r} N_i \cdot \left(|\varphi|_{K,i}\right)^i$ e $A \geq \sup\limits_{x\in K}|\varphi(x)|$, teremos $|f\varphi|_{K,r} \leq A \cdot |f|_{\varphi(K),r}$.

Lema 2. *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ *abertos,* $K \subset U$ *compacto e* $f\colon U \to V$*,* $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^s$ *aplicações de classe* C^r*. Dado um número real* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se* $g\colon W \to V$ *for de classe* C^r*, definida num aberto* W*, com* $K \subset W \subset U$*, e* $|g - f|_{K,r} < \delta$ *então* $|\varphi g - \varphi f|_{K,r} < \varepsilon$*.*

Demonstração: A fim de simplificar a notação, consideraremos $r = 2$. O caso geral se prova analogamente. Seja L uma vizinhança

compacta de $f(K)$ contida no aberto V. Então $d = \text{dist}[f(K), \mathbb{R}^s - L] > 0$. Na escolha de δ que faremos a seguir, suporemos que $0 < \delta < d$. Assim sendo, $|g(x) - f(x)| < \delta$ em K implica $g(K) \subset L$. Sabemos que

$$\begin{aligned}(\varphi g - \varphi f)'' &= \varphi'' g \cdot (g', g') + \varphi' g \cdot g'' - \varphi'' f \cdot (f', f') - \varphi' f \cdot f'' \\ &= (\varphi'' g - \varphi'' f) \cdot (g', g') + \varphi'' f \cdot (g', g' - f') \\ &\quad + \varphi'' f \cdot (g' - f', f') + (\varphi' g - \varphi' f) \cdot g'' \\ &\quad + \varphi' f \cdot (g'' - f'').\end{aligned}$$

Segue-se que, em cada ponto $x \in K$, a norma da aplicação bilinear $(\varphi g - \varphi f)''$ está sujeita à desigualdade:

$$(*) \qquad \begin{aligned}|(\varphi g - \varphi f)''| \leq |\varphi'' g - \varphi'' f| \cdot |g'|^2 + |\varphi'' f| \cdot |g' - f'| \cdot \\ \cdot (|f'| + |g'|) + |\varphi' g - \varphi' f| \cdot |g''| + |\varphi' f| \cdot |g'' - f''|.\end{aligned}$$

Seja $A = |f|_{K,2} + 1$. A segunda exigência que faremos relativamente a δ é que seja $0 < \delta < 1$. Então $|g - f|_{K,2} < \delta$ implicará $|g'| < A$ e $|g''| < A$ em K. (Evidentemente, já temos $|f'| < A$ e $|f''| < A$ em K.) Notemos que existe um número real $B > 0$ tal que $|\varphi'| < B$ e $|\varphi''| < B$ em L. Além disso, φ, φ' e φ'' são uniformemente contínuas em L, de modo que podemos impor a δ que, para $x, y \in L$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$, $|\varphi'(x) - \varphi'(y)| < \dfrac{\varepsilon}{4A}$ e $|\varphi''(x) - \varphi''(y)| < \dfrac{\varepsilon}{4A^2}$. Finalmente, suporemos que $\delta < \dfrac{\varepsilon}{8AB}$ (e portanto $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4B}$). Então a desigualdade (*) mostra que

$$|g - f|_{K,2} < \delta \;\Rightarrow\; |(\varphi g - \varphi f)''| < \varepsilon \text{ em } K.$$

Nas mesmas condições, temos ainda $|\varphi g - \varphi f| < \varepsilon$ em K. Finalmente, como

$$|(\varphi g - \varphi f)'| \leq |\varphi' g - \varphi' f| \cdot |g'| + |\varphi' f| \cdot |g' - f'|,$$

vemos que $|g - f|_{K,2} < \delta \Rightarrow |(\varphi g - \varphi f)'| < \varepsilon$ em K.

Em conclusão, se $|g - f|_{K,2} < \delta$ então $|\varphi g - \varphi f|_{K,2} < \varepsilon$.

Passaremos agora à definição da topologia de Whitney de classe C^r.

Consideremos uma variedade M e uma superfície $N \subset \mathbb{R}^s$, ambas de classe C^k. Para $0 \le r \le k$, indicaremos com $W^r(M; N)$ o conjunto das aplicações $f\colon M \to N$, de classe C^r, munido da *topologia de Whitney de classe* C^r. Um sistema fundamental de vizinhanças de $f\colon M \to N$ nessa topologia é descrito do seguinte modo. Fixamos um atlas $\mathfrak{A}$ (contido no atlas máximo de M), formado por sistemas de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ cujos domínios constituem uma cobertura localmente finita de M, com $x(U) = B(3)$ para todo $x \in \mathfrak{A}$. Como de costume, escreveremos $V = x^{-1}(B(2))$, $W = x^{-1}(B(1))$ e, sempre que for necessário, suporemos que os W's cobrem M. Fixando o atlas $\mathfrak{A}$, consideraremos as famílias $\tilde{a} = (a_x)_{x \in \mathfrak{A}}$, de números reais $a_x > 0$, com índices no conjunto $\mathfrak{A}$. Para cada uma dessas famílias poremos

$$W^r(f; \tilde{a}) = \{g \in W^r(M; N); |gx^{-1} - fx^{-1}|_r < a_x \text{ em } \overline{B(2)}, \\ \forall\, x \in \mathfrak{A}\}.$$

Quando o atlas $\mathfrak{A}$ é mantido fixo e $\tilde{a}$ percorre todas as famílias de números reais $a_x > 0$, $x \in \mathfrak{A}$, os conjuntos $W^r(f; \tilde{a})$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de f no espaço topológico $W^r(M; N)$ que fica assim definido.

Devemos mostrar que, se tomarmos outro atlas $\mathfrak{B}$ em M, com propriedaes análogas às de $\mathfrak{A}$, obteremos um sistema fundamental de vizinhanças equivalente ao anterior, ou seja, cada vizinhança de f num sistema contém uma vizinhança de f no outro sistema.

Para evitar dúvidas, escreveremos U_x par indicar o domínio do sistema de coordenadas x. Do mesmo modo, escreveremos V_x, W_x, etc. Temos que provar o seguinte

Lema 3. *Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ atlas localmente finitos (contidos no atlas máximo) de M cujos elementos têm imagem $B(3)$. Dada uma família de números reais $b_y >$, $y \in \mathfrak{B}$, existe uma família de números reais $a_x > 0$, $x \in \mathfrak{A}$, tais que $|f \circ x^{-1}|_r < a_x$ em $\overline{B(2)}$ para todo $x \in \mathfrak{A}$ implica $|f \circ y^{-1}|_r < b_y$ em $\overline{B(2)}$ para todo $y \in \mathfrak{B}$.*

Demonstração: Dado $x \in \mathfrak{A}$, existe um número finito de sistemas $y \in \mathfrak{B}$ tais que $\overline{V}_y \cap \overline{V}_x \neq \emptyset$. Pelo Lema 1, para cada um desses y, existe $A_{xy} > 0$ tal que

$$|f \circ y^{-1}|_r = |(f \circ x^{-1}) \circ (x \circ y^{-1})|_r \leq A_{xy} \circ |f \circ x^{-1}|_r \text{ em } y(\overline{V}_x \cap \overline{V}_y).$$

Escolhamos $a_x > 0$ tal que $A_{xy} \cdot a_x < b_y$ para todos os $y \in \mathfrak{B}$ (em número finito) tais que $\overline{V}_y \cap \overline{V}_x \neq \emptyset$. Então $|f \circ x^{-1}|_r < a_x$ em $x(\overline{V}_x) \Rightarrow |f \circ y^{-1}|_r < y(\overline{V}_x \cap \overline{V}_y)$. Escolhidos todos os a_x , $x \in \mathfrak{A}$, suponhamos que $f\colon M \to N$ seja tal que $|f \circ x^{-1}|_r < a_x$ em $x(\overline{V}_x)$ para cada $x \in \mathfrak{A}$. Então para qualquer $y \in \mathfrak{B}$, temos $|f \circ y^{-1}|_r < b_y$ em cada $y(\overline{V}_x \cap \overline{V}_y)$ e portanto em $\overline{B(2)} - \bigcup_x y(\overline{V}_x \cap \overline{V}_y)$.

Definido o espaço topológico $W^r(M;N)$, observamos que, para $r \geq s$, a aplicação identidade $i\colon W^r(M;N) \to W^s(M;N)$ é contínua. Concluimos portanto que todo conjunto aberto em $W^1(M;N)$ é aberto em $W^r(M;N)$ para todo $r \geq 1$. Em particular, as imersões, as submersões, os mergulhos e os difeomorfismos formam conjuntos abertos em $W^r(M;N)$ para todo $r \geq 1$. (Vide Proposições 5, 6 e 7 na Seção 4, deste capítulo.) Não é, porém, uma conseqüência da Proposição 9 que, quando M e N são de classe C^k, as aplicações $f\colon M \to N$ de classe C^k formem um subconjunto denso de $W^r(M;N)$. De qualquer maneira, este fato é verdadeiro e se demonstra da maneira análoga à da Proposição 9, tendo em vista os Lemas 1 e 2 desta seção e o fato de que a regularização nos fornece uma aproximação local em classe C^r (vide Proposição 8, na Seção 5 deste capítulo).

Podemos, então, enunciar que se M e N são de classe C^k, o conjunto das aplicações $f\colon M \to N$ de classe C^k é denso em $W^r(M;N)$ para todo r, com $0 \leq r \leq k$.

Um atlas localmente finito $\mathfrak{A}$ (contido no atlas máximo de M), formado por sistemas de coordenadas $x\colon U_x \to \mathbb{R}^m$, com $x(U_x) = B(3)$, será chamada *canônico*.

Proposição 11. *Seja $\varphi\colon M_1 \to M_2$ uma aplicação própria de classe C^r. Então $\varphi^*\colon W^r(M_2;N) \to W^r(M_1;N)$, definida por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, é contínua.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{A}$ um atlas canônico em M_2. Como φ é própria, os abertos $\varphi^{-1}(V_x)$, $x \in \mathfrak{A}$, que cobrem M_1, são relativamente compactos. Seja $\mathfrak{B}$ um atlas canônico de M_1, tal que os domínios dos seus sistemas de coordenadas formam um refinamento (localmente finito) da cobertura $(\varphi^{-1}(V_x))_{x\in\mathfrak{A}}$. Podemos então definir uma "função de escolha" $\lambda\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ tal que, para cada $y \in \mathfrak{B}$, $\overline{V}_y \subset \varphi^{-1}(\overline{V}_{\lambda(y)})$, ou seja, $\varphi(\overline{V}_y) \subset \overline{V}_{\lambda(y)}$. Como $\mathfrak{B}$ é localmente finito e (em virtude de φ ser própria) os abertos $\varphi^{-1}(\overline{V}_x)$ são relativamente compactos, segue-se que, para cada $x \in \mathfrak{A}$, existe no máximo um número finito de sistemas $y \in \mathfrak{B}$ tais que $\lambda(y) = x$. Usemos os atlas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ para definir as vizinhanças básicas nos espaços $W^r(M_2;N)$ e $W^r(M_1;N)$ respectivamente. Consideremos $f \in W^r(M_1;N)$ e uma família de números reais $b_y > 0$, $y \in \mathfrak{B}$. Para cada $x \in \mathfrak{A}$, com $x = \lambda(y)$, temos $f\varphi y^{-1} = fx^{-1} \circ x\varphi y^{-1}$ numa vizinhança de $\overline{B(2)} = y(\overline{V}_y)$. Pelo Lema 1, existe, par cada $y \in \lambda^{-1}(x)$, um número real $A_y > 0$, tal que

$$|f\varphi y^{-1}|_r \leq A_y \cdot |fx^{-1}|_r \text{ em } \overline{B(2)}.$$

Escolhamos, para cada $x \in \mathfrak{A}$, um número real $a_x > 0$, do seguinte modo: se não existir $y \in \mathfrak{B}$ tal que $\lambda(y) = x$, tomemos $a_x = 1$. Caso contrário, escolhamos a_x de tal modo que $A_y \cdot a_x < b_y$ para

todo $y \in \lambda^{-1}(x)$. Como $\lambda^{-1}(x)$ é finito, isto pode ser feito. Desta maneira, se $f, g \in W^r(M_2; N)$ são tais que $|fx^{-1} - gx^{-1}|_r < a_x$ em $\overline{B(2)}$ para todo $x \in \mathfrak{A}$, então $|f\varphi y^{-1} - g\varphi y^{-1}| < b_y$ em $\overline{B(2)}$ para todo $y \in \mathfrak{B}$, o que prova ser $\varphi^*(f) = f\varphi$ uma aplicação contínua.

Proposição 12. *Sejam M uma variedade, $N_1 \subset \mathbb{R}^n$, $N_2 \subset \mathbb{R}^s$ superfícies, todas de classe C^k, e $\varphi\colon N_1 \to N_2$ de classe C^r, $0 \leq r \leq k$. A aplicação $\varphi_*\colon W^r(M; N_1) \to W^r(M; N_2)$, definida por $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$, é contínua.*

Demonstração: Em virtude da Aplicação 3, Capítulo VIII, podemos estender φ a uma vizinhança V de N_1 no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Usaremos a mesma notação para indicar a extensão $\varphi\colon V \to N_2$, de classe C^r. Dada $f \in W^r(M; N_1)$, sejam $\mathfrak{A}$ um atlas canônico de M e $\tilde{b}$ uma família de números reais $b_x > 0$, $x \in \mathfrak{A}$. Para cada $x \in \mathfrak{A}$ existe, em virtude do Lema 2, um número real $a_x > 0$ tal que, se $g \in W^r(M; N_1)$ e $|gx^{-1} - fx^{-1}|_r < a_x$ em $\overline{B(2)}$, então $|\varphi gx^{-1} - \varphi fx^{-1}|_r < b_x$ em $\overline{B(2)}$. Logo, φ_* é contínua.

Segue-se da Proposição 12 que a topologia de $W^r(M; N)$ não depende do mergulho de N no espaço euclidiano. Isto também resulta da proposição seguinte, a qual fornece uma alternativa para definir a topologia de $W^r(M; N)$ sem mencionar métrica riemaniana em M nem supor N mergulhada no espaço euclidiano.

Sejam M, N variedades de classe C^k e $f\colon M \to N$ uma aplicação de classe C^r, $0 \leq r \leq k$. Utilizando a Proposição 1 da Seção 3, Capítulo VIII, obtemos um atlas localmente finito $\mathfrak{A}$, contido no atlas máximo de M, formado por sistemas de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ com $x(U) = B(3)$ e $f(U) \subset Z$, onde Z é domínio de um sistema de coordenadas $y\colon Z \to \mathbb{R}^n$ em N.

Para cada $x \in \mathfrak{A}$, escolhamos, de uma vez por todas, um sistema de coordenadas $y = y(x)\colon Z_x \to \mathbb{R}^n$ em N, com $f(U_x) \subset Z_x$. Dada uma família de números reais $a_x > 0$, $x \in \mathfrak{A}$, introduzire-

mos o conjunto $\Gamma^r(f;\tilde{a})$, formado pelas aplicações $g\colon M \to N$, de classe C^r, tais que $g(\overline{V}_x) \subset Z_x$ para todo $x \in \mathfrak{A}$ e, além disso,

$$|ygx^{-1} - yfx^{-1}|_r < a_x \text{ em } \overline{B(2)}, \text{ para todo } x \in \mathfrak{A}.$$

Note-se que, sendo $\overline{V}_x$ compacto, $g(\overline{V}_x) \subset Z_x$ implica a existência de um aberto A_x, com $\overline{V}_x \subset A_x \subset U_x$, tal que $g(A_x) \subset Z_x$. As aplicações ygx^{-1} e yfx^{-1} são definidas na vizinhança aberta $x(A_x)$ do compacto $\overline{B(2)}$ em $\mathbb{R}^m$.

Na proposição seguinte, a fim de poder considerar a topologia de $W^r(M;N)$, suporemos que $N \subset \mathbb{R}^s$ é uma superfície.

Proposição 13. *Mantendo fixo o atlas $\mathfrak{A}$ e fazendo variar a família $\tilde{a}$, os conjuntos $\Gamma^r(f;\tilde{a})$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de f em $W^r(M;N)$.*

Demonstração: Dado $\Gamma^r(f;\tilde{a})$, definiremos uma família $\tilde{b}$ de números reais $b_x > 0$, $x \in \mathfrak{A}$, tal que $W^r(f;\tilde{b}) \subset \Gamma^r(f;\tilde{a})$. Primeiro, uma precaução. Para cada $x \in \mathfrak{A}$, temos $d_x = \text{dist}[fx^{-1}(\overline{B(2)}), \mathbb{R}^n - y(Z_x)] > 0$. Imporemos que seja $0 < b_x < d_x$ para cada $x \in \mathfrak{A}$. Isto nos assegurará que toda $g\colon M \to N$ com $|gx^{-1} - fx^{-1}| < b_x$ em $\overline{B(2)}$ cumpre a condição $g(\overline{V}_x) \subset Z_x$. Agora, usaremos o Lema 2. Segundo ele, para cada $x \in \mathfrak{A}$, o número $b_x > 0$ pode ser tomado de tal forma que $|ygx^{-1} - yfx^{-1}|_r < b_x$ em $\overline{B(2)}$ implica $|gx^{-1} - fx^{-1}| < a_x$ em $\overline{B(2)}$. (Estamos tomando $\varphi - y^{-1}$ no lema.) Isto significa que $W^r(f;\tilde{b}) \subset \Gamma^r(f;\tilde{a})$. De maneira análoga mostra-se que, reciprocamente, dada $\tilde{b} = (b_x)$, existe $\tilde{a} = (a_x)$ tal que $\Gamma^r(f;\tilde{a}) \subset W^r(f;\tilde{b})$.

Para finalizar, diremos uma palavra sobre a topologia da convergência uniforme de classe C^r nas partes compactas. No conjunto das aplicações $f\colon M \to N$ de classe C^r, introduzimos a topologia segundo a qual um sistema fundamental de vizinhanças de $f\colon M \to N$ é definido considerando-se uma cobertura localmente

finita $M = \bigcup U_i$ por domínios de sistemas de coordenadas $x_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ tais que $x_i(U_i) = B(3)$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$. Para cada número real $c > 0$ e cada inteiro j, pomos

$$V^r = \{g \colon M \to N, g \in C^r, |gx_i^{-1} - fx_i^{-1}|_r < \varepsilon \text{ em } \overline{B(2)}; \\ i = 1, \dots, j\}.$$

Acima, estamos admitindo que $N \subset \mathbb{R}^s$ é uma superfície no espaço euclidiano. Os conjuntos $V^r(f; j, \varepsilon)$, quando j percorre os inteiros positivos e $\varepsilon > 0$ é um número real, formam um sistema fundamental de vizinhanças de um espaço topológico que indicaremos com $C^r(M; N)$.

Do mesmo modo como em W^r, obtemos ainda um sistema fundamental de vizinhanças de $f \colon M \to N$ em $C^r(M; N)$ se impusermos à cobertura $M = \bigcup U_i$ que, para cada i, exista um sistema de coordenadas $y_i \colon Z_i \to \mathbb{R}^n$ em N, tal que $f(U_i) \subset Z_i$. Em seguida, para cada inteiro j e cada real $c > 0$, pomos

$$\Delta^r(f; j, \varepsilon) = \{g \colon M \to N; g \in C^r, g(\overline{V}_i) \subset Z_i \text{ e} \\ |y_i g x_i^{-1} - y_i f x_i^{-1}|_r < \varepsilon \text{ em } \overline{B(2)}, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, j\}.$$

Quando $j > 0$ varia entre os inteiros e $\varepsilon > 0$ entre os reais, os conjuntos $\Delta^r(f; j, \varepsilon)$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças equivalente àquele formado pelos $V^r(f; j, \varepsilon)$, portanto definindo ainda em $C^r(M; N)$ a topologia da convergência uniforme de classe C^r nas partes compactas. Note-se que as vizinhanças Δ^r podem ser definidas sem que N esteja mergulhada no espaço euclidiano.

A aplicação identidade $W^r(M; N) \to C^r(M; N)$ é contínua. Segue-se que as aplicações $f \colon M \to N$, de classe C^k, (onde M e N são de classe C^k) formam um subconjunto denso de $C^r(M; N)$. Não é verdade, entretanto, que as imersões, submersões, mergu-

lhos e difeomorfismos constituam abertos em $C^r(M;N)$ salvo, evidentemente, quando M é compacta, caso em que $C^r(M;N) = W^r(M;N)$.

Capítulo XI

Os Teoremas de Imersão e Mergulho de Whitney

Os resultados principais deste capítulo são os teoremas de Whitney, segundo os quais se pode aproximar arbitrariamente qualquer aplicação de classe C^k $f\colon M^m \to \mathbb{R}^{2m}$ por uma imersão e qualquer $f\colon M^m \to \mathbb{R}^{2m+1}$ (ainda de classe C^k) por uma imersão biunívoca. Além disso, qualquer variedade M^m pode ser mergulhada como um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^{2m+1}$. Como conseqüência da discussão, resultará que todo atlas máximo de classe C^1 numa variedade contém um atlas C^∞. Inicialmente exporemos as noções básicas sobre conjuntos de medida nula numa variedade.

1 Conjuntos de medida nula em uma variedade

Um *cubo* $C \subset \mathbb{R}^m$ é um produto cartesiano $C=[a_1,a_1+r] \times \cdots \times [a_m, a_m + r]$ de m intervalos fechados de mesmo comprimento r. O número r é chamado a *aresta* do cubo C. O volume de C é definido por $\mathrm{vol}(C) = r^m$. Quando a métrica de $\mathbb{R}^m$ é dada pelo produto interno $\langle x, y\rangle = \sum x^i y^i$, o diâmetro de C é $n\sqrt{m}$.

Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ tem *medida nula* em $\mathbb{R}^m$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, é possível achar uma cobertura enumerável de X por cubos, $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, tal que $\sum\limits_i \mathrm{vol}(C_i) < \varepsilon$. Notação: $\mathrm{med}(X) = 0$ em $\mathbb{R}^m$.

Se $X \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ então $\mathrm{med}(Y) = 0$ em $\mathbb{R}^m$ implica $\mathrm{med}(X) = 0$ em $\mathbb{R}^m$.

Proposição 1. *Se $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ são conjuntos de medida nula em $\mathbb{R}^m$, então $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Seja dado $\varepsilon > 0$. Podemos achar, para cada i, uma cobertura enumerável $X_i \subset \bigcup\limits_j C_{ij}$ por cubos tais que $\sum\limits_j \mathrm{vol}(C_{ij}) < \varepsilon/2^i$. Resulta daí que $X \subset \bigcup\limits_{i,j} C_{ij}$ é uma cobertura enumerável de X por cubos C_{ij} tal que $\sum\limits_{i,j} \mathrm{vol}(C_{i,j}) < \sum\limits_i \varepsilon/2^i = \varepsilon$. Logo $\mathrm{med}(X) = 0$ em $\mathbb{R}^m$.

Corolário 1. *Todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}^m$ tem medida nula.*

Corolário 2. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula se, e somente se, cada ponto $p \in X$ possui uma vizinhança V_p tal que* $\mathrm{med}(X \cap V_p) = 0$ *em $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração: A parte do "somente se"é evidente. Por outro lado, da cobertura $X \subset \bigcup_{p \in X} V_p$ com $\text{med}(V_p \cap X) = 0$ obtemos, pelo teorema de Lindelöf, uma subcobertura enumerável $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{p_i}$. Pela proposição, $X = \bigcup_i (V_{p_i} \cap X)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 1. Seja $C = I_1 \times \cdots \times I_m$ um cubo. Para qualquer $s > 0$, $C \times 0$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^{n+s}$, como pode facilmente ser verificado.

Os conjuntos de medida nula são úteis no estudo das variedades diferenciáveis por dois motivos: primeiro porque têm interior vazio, e segundo porque suas imagens mediante aplicações de classe C^1 possuem também medida zero. Estes fatos serão provados logo em seguida.

Sejam X e Y espaços métricos. Uma aplicação $f\colon X \to Y$ diz-se *lipschitziana* quando existe uma constante $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$ para todos $x, y \in X$. Dizemos que f é *localmente lipschitziana* se todo ponto $p \in X$ possui uma vizinhança V_p tal que $f|V_p$ é lipschitziana.

Uma aplicação lipschitziana é uniformemente contínua, logo uma aplicação localmente lipschitziana é contínua. Se $X \subset \mathbb{R}^m$, toda aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, é localmente lipschitziana, pela desigualdade do valor médio.

Proposição 2. *Se $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula e $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ é localmente lipschitziana, então $f(X)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Todo ponto $p \in X$ possui uma vizinhança V_p na qual f é lipschitziana, com constante k_p. A cobertura $X = \bigcup_p V_p$ possui uma subcobertura enumerável $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i}$. Portanto, pela Proposição 1, podemos supor que f é lipschitziana: $|f(x) -$

$f(y)| \leq k|x-y|$ para todos $x, y \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura enumerável $X \subset \bigcup C_i$ por cubos C_i, com $\sum_i \text{vol}(C_i) < \varepsilon(2k\sqrt{m})^{-m}$. Seja r_i a aresta de C_i. Como para todo i, o diâmetro de C_i é $r_i\sqrt{m}$, o diâmetro de $f(X \cap C_i)$ é $\leq k\, r_i\sqrt{m}$. Resulta daí que $f(X \cap C_i) \subset K_i$, onde K_i é um cubo de aresta $2kr_i\sqrt{m}$. Ora, $\text{vol}(K_i) = (2kr_i\sqrt{m})^m = (2k\sqrt{m})^m \,\text{vol}(C_i)$ logo $\sum \text{vol}(K_i) = (2k\sqrt{m})^m \sum \text{vol}(C_i) < \varepsilon$. Como $f(X) = \bigcup_i f(X \cap C_i) \subset \bigcup_i K_i$, $f(X)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.

Diz-se que um subconjunto X de uma variedade diferenciável M tem *medida nula em M* se, para todo $p \in X$, existe um sistema de coordenadas locais $x\colon U \to \mathbb{R}^m$, com $p \in U$, tal que $x(U \cap X)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.

Se $\text{med}(X) = 0$ em M então, para *qualquer* sistema de coordenada $y\colon V \to \mathbb{R}^m$ em M, tem-se $\text{med}(y(V \cap X)) = 0$ em $\mathbb{R}^m$. Isto resulta imediatamente da proposição anterior. Outra conseqüência da Proposição 2 é que a imagem de um conjunto $X \subset M^m$ de medida nula por uma aplicação de classe C^1, $f\colon M^m \subset N^m$, é ainda um conjunto de medida nula (note que $\dim M = \dim N$). Os seguintes são corolários da Proposição 2:

Corolário 1. *Seja $M^m \subset N^n$ uma subvariedade de classe C^1 (pelo menos). Se $m < n$, então M tem medida nula em N.*

Demonstração: Em torno de cada ponto $p \in M$ existe um sistema de coordenadas locais $x\colon U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ em N, com $x(U) = V \times W$, $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ aberto, e $x(U \cap M) = V \times 0$. Podemos supor que $V \subset \mathbb{R}^m$ é o interior de um cubo. Pelo Exemplo 1, $x(U \cap M)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Isto demonstra a proposição.

Corolário 2. *Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação de classe C^1. Se $\dim M < \dim N$, então $f(M)$ tem medida nula em N.*

Demonstração: Ponhamos $s = \dim N - \dim M$. Consideremos

a aplicação $g\colon M \times \mathbb{R}^s \to N$, de classe C^1, definida por $g(p,y) = f(p)$. Ora, $\dim(M \times \mathbb{R}^s) = \dim N$ e, pela proposição acima, $M \times \{0\}$ tem medida nula em $M \times \mathbb{R}^s$. Resulta daí que $g(M \times \{0\}) = f(M)$ tem medida nula em N.

Proposição 3. *Numa variedade diferenciável, todo conjunto de medida nula tem interior vazio.*

Demonstração: Basta provar para $\mathbb{R}^m$ e, nesse caso, é suficiente mostrar que um cubo não tem medida nula. Para isso, usaremos o fato, conhecido de Cálculo, de que o volume de um cubo C_∞ é a integral de sua função característica χ_C. Se $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ então, por compacidade, $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} C_i$. Segue-se que $\chi_C \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \chi_{C_i}$ e portanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(C) = \int \chi_C \leq \int \sum_{i=1}^{k} \chi_{C_i} = \sum_{i=1}^{k} \int \chi_{C_i} \\ = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{vol}(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(C_i). \end{aligned}$$

Assim, para $0 < \varepsilon < \operatorname{vol}(C)$, não é possível achar cobertura enumerável $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ com $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(C_i) < \varepsilon$.

Exemplo 2. As esferas são simplesmente conexas. Vejamos:

Sejam X, Y espaços topológicos. Dizemos que duas aplicações contínuas $f, g\colon X \to Y$ são *homotópicas*, e escrevemos $f \sim g$, quando existe uma aplicação contínua $H\colon X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A relação "f e g são homotópicas" é uma relação de equivalência.

Duas aplicações contínuas $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ são sempre homotópicas. Para ver isto basta considerar $H\colon X \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dada por $H(x,t) = (1-t)f(x) + t\, g(x)$.

Se $f, g\colon X \to S^n$ são aplicações contínuas tais que $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$, então f e g são homotópicas. Basta tomar $H\colon X \times [0,1] \to S^n$ definida por

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}.$$

Se uma aplicação contínua $f\colon X \to S^n$ não é sobrejetiva, então f é homotópica a uma constante. Com efeito, existe um ponto $p \in S^n$ tal que $f(X) \subset S^n - \{p\}$. Como a projeção estereográfica é um homeomorfismo $\varphi\colon S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$, (vide ETG, pag. 44) podemos pensar em f como uma aplicação de X em $\mathbb{R}^n$ e, como tal, ela é homotópica a uma constante.

Um espaço topológico diz-se *simplesmente conexo* quando toda aplicação contínua $f\colon S^1 \to X$ é homotópica a uma constante.

Afirmamos que, para $n > 1$, a esfera S^n é simplesmente conexa. Realmente, dada uma aplicação contínua $f\colon S^1 \to S^n$, existe uma aplicação de classe C^1, $g\colon S^1 \to S^n$, tal que $|g(x) - f(x)| < 2$ para todo $x \in S^1$ (ver Corolário 2 da Proposição 1, Seção 1, Cap. X). Por conseguinte, $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in S^1$, logo $f \sim g$, como sabemos, pelo Corolário 2 da Proposição 2, $g(S^1)$ tem medida nula em S^n. Em particular g não é sobrejetiva, logo g é homotópica a uma constante. Por transitividade, f também o é.

2 Imersões

Dados um conjunto Y e um vetor v no espaço euclidiano $\mathbb{R}^s$, indicaremos com $Y + v$ a imagem de Y pela translação $x \mapsto x + v$, ou seja $Y + v = \{y + v \in \mathbb{R}^s; y \in Y\}$. Mostraremos abaixo como separar dois conjuntos em $\mathbb{R}^s$ mediante translação de um deles.

Lema 1. *Dada $f\colon M^m \to \mathbb{R}^s$ de classe C^1, seja $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ uma reunião enumerável de superfícies de codimensões maiores do que*

m em $\mathbb{R}^s$. Salvo um conjunto de medida nula, para todo vetor $v \in \mathbb{R}^s$ tem-se $[f(M) + v] \cap X = \emptyset$.

Demonstração: Dizer que $[f(M) + v] \cap X \neq \emptyset$ significa afirmar que existem $p \in M$ e, para algum i, $q \in N_i$ tais que $f(p)+v = q$, ou seja $v = q-f(p)$. Isto equivale a dizer que v pertence à reunião das imagens das aplicações $\varphi_i\colon M \times N_i \to \mathbb{R}^s$, onde $\varphi_i(p,q) = q-f(p)$. Ora, como $\dim M + \dim N_i < s$ para cada i, segue-se que a imagem de cada φ_i tem medida nula em $\mathbb{R}^s$. A reunião também tem medida nula e o lema fica demonstrado.

Os lemas abaixo referem-se à seguinte situação:
$B(3)$ é a bola aberta de raio 3 e centro 0 em $\mathbb{R}^m$, $f\colon B(3) \to \mathbb{R}^s$ é uma aplicação de classe C^r $(r \geq 1)$ e $s \geq 2m$.

Lema 2. *Dado $\varepsilon > 0$, existe uma imersão $g\colon B(3) \to \mathbb{R}^s$, de classe C^∞, com $|g - f|_1 < \varepsilon$ em $B(3)$.*

Demonstração: Em virtude da Proposição 9, Capítulo X, podemos supor $f \in C^\infty$. Tentemos obter $g\colon G(3) \to \mathbb{R}^s$ da forma $g(x) = f(x) + A \cdot x$, onde A é uma matriz $s \times m$. Então teremos $g'(x) = f'(x) + A$; o problema é obter A bem pequena e de tal modo que $f'(x) + A$ não tenha posto inferior a m para ponto algum $x \in B(3)$. Ora, as matrizes $s \times m$ de posto $i < m$ constituem uma superfície $N_i \subset \mathbb{R}^{sm}$ cuja codimensão é $(m-i)(s-i)$. (Vide Seção 6, Capítulo II, Exemplo 3.) Como $s \geq 2m$, e $i \leq m-1$, temos $(m-i)(s-i) \geq 1 \cdot [2m - (m-1)] = M + 1$. Logo, cada superfície N_i tem codimensão $> m$ em $\mathbb{R}^{sm}$. A aplicação $f'\colon B(3) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s) = \mathbb{R}^{sm}$ é de classe C^∞. Pelo Lema 1, para qualquer matriz A fora de um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^{sm}$, $f'(x) + A$ tem posto m, qualquer que seja $x \in B(3)$. Isto quer dizer que $g(x) = f(x) + A \cdot x$ é uma imersão. Como um conjunto de medida nula não pode conter uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^s$, podemos escolher A tão pequena quanto desejemos, o que fará $|g - f|_1$

arbitrariamente pequeno em $B(3)$.

Lema 3. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $h\colon B(3) \to \mathbb{R}^s$, de classe C^r, tal que $|h - f|_1 < \varepsilon$ em $B(3)$, $h = f$ em $B(3) - B(2)$ e $h|\overline{B(1)}$ é uma imersão C^∞.*

Demonstração: Seja $\varphi\colon B(3) \to [0,1]$ uma função auxiliar, com $\varphi \in C^\infty$, $\varphi(\overline{B(1)}) = 1$ e $\varphi(B(3) - B(2)) = 0$. Seja $a > 0$ uma constante tal que $1 + |\varphi(x)| + |\varphi'(x)| < a$ para todo $x \in B(3)$. Usando o Lema 2, obtemos uma imersão $g\colon B(3) \to \mathbb{R}^s$, de classe C^∞, tal que $|g - f|_1 < \varepsilon/a$ em $B(3)$. Definimos, em seguida, $h\colon B(3) \to \mathbb{R}^s$ pondo

$$h(x) = f(x) + \varphi(x) \cdot (g(x) - f(x)).$$

Para $x \in B(3) - B(2)$, temos $\varphi(x) = 0$, donde $h(x) = f(x)$. Para $x \in \overline{B(1)}$ temos $\varphi(x) = 1$ e portanto $h(x) = g(x)$. Além disso, $|h - f| \leq |g - f| < \varepsilon$ e $|h' - f'| \leq |\varphi'| \cdot |g - f| + |\varphi| \cdot |g' - f'| < \varepsilon$ em $B(3)$.

O lema abaixo é uma versão mais refinada do que acabamos de demonstrar.

Lema 4. *Seja $F \subset B(3)$ um subconjunto fechado tal que $f|F$ é uma imersão. Dado $\varepsilon > 0$, existe $h\colon B(3) \to \mathbb{R}^s$ de classe C^r tal que $|h - f|_1 < \varepsilon$ em $B(3)$, $h|\overline{B(1)} \cup F$ é uma imersão e $h = f$ em $F \cup [B(3) - B(2)]$.*

Demonstração: Observemos que $K = F \cap \overline{B(2)}$ é compacto e que basta obter h tal que $|h - f|_1 < \varepsilon$ em $B(3)$, $h|\overline{B(1)} \cup K$ é imersão e $h = f$ em $K \cup [B(3) - B(2)]$.

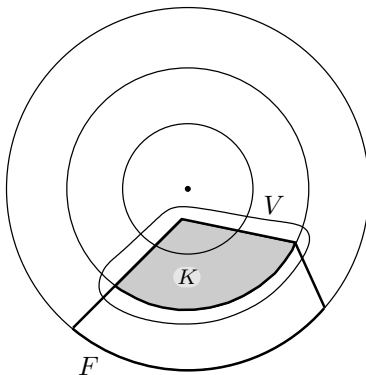



Figura 11.1.

Seja V uma vizinhança aberta de K tal que $\overline{V}$ é compacto e contido em $B(3)$. Podemos supor que ε é tão pequeno que $|h-f|_1<\varepsilon$ implique $h|\overline{V}$ ser uma imersão. Seja $\xi\colon B(3)\to[0,1]$ de classe C^∞ tal que $\xi=0$ em $K\cup[B(3)-B(2)]$ e $\xi=1$ em $\overline{B(1)}-V$. Ponhamos $h=f+\xi\cdot(g-f)$ onde g, obtida pelo Lema 2, é uma imersão C^∞ de $B(3)$ em $\mathbb{R}^s$ tal que $|g-f|_1<\varepsilon/a$ em $B(3)$, a constante a satisfazendo $a>|\xi(x)|+|\xi'(x)|+1$ para todo $x\in B(3)$. Tem-se $|h-f|_1<\varepsilon$. Em particular, $h|\overline{V}$ é imersão. Como $h=g$ em $\overline{B(1)}-V$, segue-se que $h|\overline{B(1)}-V$, é imersão. Do mesmo modo, $h|K$ é imersão pois $h=f$ em K. Por conseguinte, h é uma imersão em $\overline{B(1)}\cup K$, pois $\overline{B(1)}\cup K\subset(\overline{B(1)}-V)\cup K$. As demais afirmações do lema são imediatas.

Proposição 4. *Seja M^m uma variedade de classe C^k e dimensão m. Se $s\geq 2m$, as imersões $g\colon M^m\to\mathbb{R}^s$, de classe C^1, constituem um conjunto aberto e denso em $W^1(M^m;\mathbb{R}^s)$.*

Demonstração: Basta provar a densidade. (Vide Proposição 5, Capítulo X.) Dadas $\varepsilon\colon M\to\mathbb{R}$ contínua, positiva e $f\colon M\to\mathbb{R}^s$ de classe C^1, devemos obter uma imersão $g\colon M\to\mathbb{R}^s$, de classe C^1, tal que $|g-f|_1<\varepsilon$ em M. Para isso consideraremos uma

cobertura enumerável, localmente finita $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, por domínios de sistemas de coordenadas $x_i \colon U_i \to \mathbb{R}^m$ tais que $x_i(U_i) = B(3)$ e, pondo $V_i = x_1^{-1}(B(2))$, $W_i = x_i^{-1}(B(1))$, temos ainda $M = \bigcup W_i$. Definiremos indutivamente uma seqüência de aplicações $f_0, f_1, \ldots, f_i, \ldots$ se M em $\mathbb{R}^s$, todas de clase C^1, tais que

(i) $f_0 = f$ e $f_i = f_{i-1}$ em $M - V_i$;

(ii) $|f_i - f_{i-1}|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$ em M;

(iii) f_i é uma imersão em $\overline{W}_1 \cup \cdots \cup \overline{W}_i$.

Começamos pondo $f_0 = f$ e, supondo já definidas $f_1, \ldots, f_{i-1}$ com as propriedades acima, passamos a definir f_i. Seja $\lambda = f_{i-1} \circ x_i^{-1} \colon B(3) \to \mathbb{R}^s$. Pela Proposição 2, Capítulo X, existe $a > 0$ tal que se $\mu \colon B(3) \to \mathbb{R}^s$, de classe C^1, satisfaz $|\mu - \lambda|_1 < a$ em $\overline{B(2)}$, então $|\mu \circ x_i - \lambda \circ x_i|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$ em $\overline{V}_i$. Seja $F = x_i[(\overline{W}_1 \cup \cdots \cup \overline{W}_{i-1}) \cap U_i]$. Pelo Lema 4, existe $\mu \colon B(3) \to \mathbb{R}^s$, de classe C^1 tal que $|\mu - \lambda|_1 < \varepsilon$ em $B(3)$, $\mu = 1$ em $[B(3) - B(2)] \cup F$ e μ é uma imersão em $\overline{B(1)} \cup F$.

Definamos $f_i \colon M \to \mathbb{R}^s$ pondo $f_i = f_{i-1}$ em $M - V_i$ e $f_i = \mu \circ x_i$ em U_i. Vê-se que f_i cumpre as condições (i), (ii) e (iii) acima. Para finalizar, definimos $f \colon M \to \mathbb{R}^s$ como o limite $f(p) = \lim_{i \to \infty} f_i(p)$.

Observações:

1) Se $k > 1$, as imersões $f \colon M^m \to \mathbb{R}^s$ $(s \geq 2m)$ de classe C^k formam um subconjunto denso de $W^1(M; \mathbb{R}^s)$, pela Proposição 9, Capítulo X. Tal conjunto, evidentemente, não é aberto em $W^1(M; \mathbb{R}^s)$. Entretanto, a mesma demonstração acima se aplica para a topologia W^r. (Vide Seção 6, Capítulo X.) Podemos então concluir que, se $M \in C^k$ $(k \geq r)$ e $2m \leq s$, então as imersões $f \colon M^m \to \mathbb{R}^s$, de classe C^r, formam um subconjunto aberto denso de $W^r(M; \mathbb{R}^s)$.

2) Se existe um subconjunto fechado $X \subset M^m$ tal que $f|X$ é uma

imersão, onde $f\colon M^m \to \mathbb{R}^s$ é de classe C^r, então, dada qualquer $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$ contínua e positiva, existe uma imersão $g\colon M \to \mathbb{R}^s$, de classe C^r, tal que $|g - f|_r < \varepsilon$ em M e $g = f$ em X. Para obter isto basta, na demonstração da proposição acima, tomar $F = x_i[(X \cup \overline{W}_1 \cup \cdots \cup W_{i-1}) \cap U_i]$.

3) Dadas duas variedades *arbitrárias* M^m, N^s, de classe C^r, com $s \geq 2m$, o conjunto das imersões $f\colon M^m \to N^s$, de classe C^r, é aberto e denso em $W^r(M;N)$. A demonstração se faz de modo inteiramente análogo ao do caso $N = \mathbb{R}^s$, tomando-se apenas o cuidado de exigir que, para cada i, se tenha $f(U_i) \subset Z_i$, onde $Z_i \subset N$ é domínio de um sistema de coordenadas $y_i\colon Z_i \to \mathbb{R}^s$.

4) É possível demonstrar que toda variedade de dimensão n admite uma imersão em $\mathbb{R}^{2m-1}$. Entretanto as imersões em geral não constituem um subconjunto denso de $W^1(M^m; \mathbb{R}^{2m-1})$. Por exemplo, para $m = 1$, temos $2m - 1 = 1$. Entretanto, as imersões não são densas em $W^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ pois a função $x \mapsto x^2$ não pode ser aproximada por imersões. Com efeito, qualquer função C^1-próxima de $y = x^2$ deve ter pontos onde a derivada é positiva e pontos de derivada negativa. Logo, deve ter pontos onde a derivada é nula. Conseqüentemente, não é uma imersão.

3 Imersões injetivas e mergulhos

Mostraremos aqui que toda variedade de dimensão m pode ser mergulhada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2m+1}$. Isto será conseqüência de resultados mais precisos que estabeleceremos. Incialmente, vejamos um fato de Topologia Geral.

Lema 1. *Sejam $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{D} = (D_\alpha)_{\alpha \in A}$ coberturas localmente finitas do espaço topológico X, tais que $\overline{D}_\alpha \subset C_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tal que se $U, V \in \mathcal{U}$ e*

$U \cap V \neq \emptyset$ então $U \cup V$ está contido em algum C_α .

Demonstração: Para cada $x \in X$ escolhamos um índice $\alpha(x) \in A$ tal que $x \in D_{\alpha(x)}$. Como a família $(\overline{D}_\alpha)_{\alpha \in A}$ é ainda localmente finita, podemos, para cada $x \in X$, tomar uma vizinhança aberta U_x , contida em $D_{\alpha(x)}$ e disjunta dos $\overline{D}_\alpha$ que não contêm x. Ou seja, $U_x \cap \overline{D}_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{D}_\alpha$. Diminuindo U_x se necessário, podemos ainda fazer com que $x \in \overline{D}_\alpha \Rightarrow U_x \subset C_\alpha$. Obtemos assim uma cobertura aberta $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in X}$ tal que $U_x \subset D_{\alpha(x)}$ e $U_x \cap \overline{D}_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow U_x \subset C_\alpha$, quaisquer que sejam $x \in X$ e $\alpha \in A$. Nestas condições, $U_x \cap U_y \neq \emptyset \Rightarrow U_x \cap \overline{D}_{\alpha(y)} \neq \emptyset \Rightarrow U_x \subset C_{\alpha(y)} \Rightarrow U_x \cup U_y \subset C_{\alpha(y)}$ a última implicação valendo porque $U_y \subset C_{\alpha(y)}$. O lema está demonstrado.

Proposição 5. *Seja M^m uma variedade de dimensão m e classe C^k. Se $s \geq 2m+1$, as imersões injetivas $g\colon M \to \mathbb{R}^s$, de classe C^k, constituem um subconjunto denso de $W^1(M;\mathbb{R}^s)$.*

Demonstração: Dadas $f \in W^1(M;\mathbb{R}^s)$ e $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$ contínua positiva, devemos obter uma imersão de classe C^k e injetiva, $g\colon M \to \mathbb{R}^s$, tal que $|g - f|_1 < \varepsilon$ em M. Pela Proposição 9, Capítulo X, podemos supor $f \in C^k$. Em virtude da Proposição 4, podemos supor que f é uma imersão e que $|g - f|_1 < \varepsilon \Rightarrow g$ imersão. Como toda imersão é localmente um mergulho, a Proposição 1, Capítulo VIII e o Lema 1 acima garantem a existência de uma cobertura localmente finita $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ por domínios de sistemas de coordenadas $x_i\colon U_i \to \mathbb{R}^m$ tais que $x_i(U_i) = B(3)$ e, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $f|(U_i \cup U_j)$ é injetiva. Como de hábito, poremos $V_i = x_i^{-1}(B(2))$ e suporemos que os $W_i = x_i^{-1}(B(1))$ cobrem M. Definiremos indutivamente uma seqüência de imersões $f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$ de M em $\mathbb{R}^s$ com as seguintes propriedades:

(i) $f_1 = f$ e $f_i = f_{i-1}$ em $M - V_i$;

(ii) $|f_i - f_{i-1}|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$ em M (e portanto f_i é uma imersão);

(iii) Se $\overline{W}_r \cap \overline{W}_s \neq \emptyset$ então $f_i|(\overline{W}_r \cup \overline{W}_x)$ é injetiva (e portanto um mergulho);

(iv) f_i é injetiva em $\overline{W}_1 \cup \cdots \cup \overline{W}_i$.

Pomos $f_0 = f$ e, supondo $f_0, \ldots, f_{i-1}$ definidas e gozando dessas propriedades, passamos à definição de f_i. Seja $\varphi_i \colon M \to [0,1]$ uma função de classe C^k tal que $\varphi_i(\overline{W}_i) = 1$, $\varphi_i(M - V_i) = 0$ e, além disso $\varphi_i(\overline{W}_j) = 0$ para todo $j < i$ com $\overline{W}_j \cap \overline{W}_i = \emptyset$. Poremos $f_i(p) = f_{i-1}(p) + \varphi_i(p) \cdot v$, onde $v \in \mathbb{R}^s$ é um vetor que obteremos de modo a fazer cumprir as propriedades (i) a (iv). A propriedade (i) é satisfeita para todo v e (ii) valerá para qualquer v cuja norma $|v|$ seja suficientemente pequena. Para cumprir (iii), basta considerar os $\overline{W}_r$ e $\overline{W}_s$ que intersetam $\overline{V}_i$. Há um número finito destes. Pelo Escólio que se segue à Proposição 6 do Capítulo X, (iii) valerá para qualqur $v \in \mathbb{R}^s$ suficientemente pequeno. Ainda por esse Escólio, f_i será um mergulho em $\overline{W}_1 \cup \cdots \cup \overline{W}_{i-1}$ para todo v suficientemente pequeno. Para satisfazer (iv), escolhamos v, conforme o Lema 1 da seção anterior, de tal modo que $[f_{i-1}(U_i) + v] \cap f_{i-1}(U_j) = \emptyset$ para todo $j < i$ com $\overline{W}_i \cap \overline{W}_j = \emptyset$. Se $p \in \overline{W}_i$ e $q \in \overline{W}_j$ (com $j < i$ e $\overline{W}_i \cap \overline{W}_j = \emptyset$) então $f_i(p) = f_{i-1}(p) + v$ e $f_i(q) = f_{i-1}(q)$. Portanto $f_i(p) \neq f_i(q)$. Segue-se que f_i é injetiva em $\overline{W}_1 \cup \cdots \cup \overline{W}_i$, o que conclui a construção da seqüência (f_i). Para finalizar, pomos $g = \lim f_i$.

Corolário. *Seja M^m uma variedade compacta de dimensão m e classe C^k. Se $s \geq 2m+1$ os mergulhos $f \colon M \to \mathbb{R}^s$, de classe C^k, constituem um subconjunto denso de $W^1(M;\mathbb{R}^s)$ e os mergulhos de classe C^1 formam um aberto denso em $W^1(M;\mathbb{R}^s)$.*

Com efeito, sendo M compacta, um mergulho de M é simplesmente uma imersão injetiva.

Observações:

1) Segue-se das demonstrações acima que os mergulhos de classe C^r da variedade compacta M^m, de classe C^r, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^s$ $(s \geq 2m+1)$ formam um aberto denso em $W^r(M.\mathbb{R}^s)$.

2) Dadas duas variedades arbitrárias M^m, N^s, de classe C^r, com $s \geq 2m+1$, as imersões injetivas $f\colon M^m \to N^s$, de classe C^r, formam um subconjunto denso de $W^r(M^m; N^s)$. Se M for compacta, os mergulhos de classe C^r de M em N formam um subconjunto aberto e denso de $W^r(M^m; N^s)$. [Vide Observação 3 na seção anterior.]

3) As imersões injetivas $f\colon M^m \to \mathbb{R}^{2m+1}$ não formam um subconjunto aberto de $W^1(M; \mathbb{R}^{2m+1})$. Com efeito, a imersão injetiva $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, cuja imagem tem a forma do algarismo 6, pode ser arbitrariamente aproximada em classe C^1 por imersões que não são injetivas

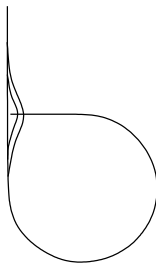



Figura 11.2.

4) A imersão $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$, cuja imagem tem a forma do algarismo 8, não pode ser aproximada (sequer em classe C^0) por uma imersão biunívoca. Isto mostra que $2m+1$ é a dimensão mínima para a validez da proposição anterior. Pode-se, entretanto, demonstrar (com métodos bem mais avançados) que o conjunto das imersões biunívocas, e mesmo dos mergulhos, de M^m em $\mathbb{R}^{2m}$ é não-vazio, para toda M^m.

5) Os mergulhos de uma variedade não-compacta M^m em $\mathbb{R}^{2m+1}$ não formam um subconjunto denso de $W^1(M;\mathbb{R}^{2m+1})$. Isto se deve a uma razão meramente topológica. Sejam X, Y espaços métricos e $f, g\colon X \to Y$ aplicações contínuas. Lembremos que o conjunto limite $L(f)$ é formado pelos pontos $y = \lim f(x_n)$, onde $x_n \to \infty$ em X. É fácil verificar que se existe um $c > 0$ tal que $d(f(x), g(x)) < c$ então $L(f) = L(g)$. Suponhamos agora que $L(f)$ contém uma bola $B(f(a);\varepsilon)$, $a \in X$. Neste caso $f\colon X \to Y$, mesmo que seja injetiva, não será um homeomorfismo sobre $f(X)$, pois a aplicação contínua injetiva f é um homeomorfismo sobre sua imagem se, e somente se, $L(f) \cap f(X) = \emptyset$. Mais ainda se $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ então $g\colon X \to Y$ tampouco poderá ser um homeomorfismo sobre $f(X)$. Com efeito, teremos $g(a) \in B(f(a), \varepsilon) \subset L(f) = L(g)$ e portanto $L(g) \cap g(X) \neq \emptyset$. Construiremos agora uma imersão injetiva $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, de classe C^∞, tal que $L(f)$ contém um cubo ao qual pertencem vários pontos de $f(\mathbb{R})$. Resultará que nenhuma $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ suficientemente próxima de f poderá ser um mergulho. Para definir f, tomamos o cubo unitário

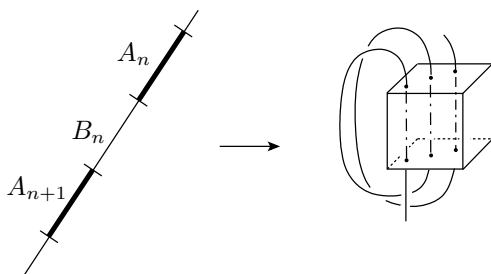



Figura 11.3.

$C = [0,1]\times]0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$. Por cada ponto $(r, s, 0)$ de coordenadas racionais r, s na base de C fazemos passar um segmento vertical $J = (r, s) \times [0, 1]$. Enumeramos esses segmentos na

forma J_n, $n \in \mathbb{Z}$. Exprimimos a reta como reunião de intervalos unitários justapostos A_n, B_n, $n \in \mathbb{Z}$, onde $A_n = [2n, 2n+1]$ e $B_n = (2n+1, 2n+2)$. Fazemos com que f aplique A_n sobre J_n isometricamente e usamos o intervalo B_n para ligar suavemente A_n com A_{n+1}. É imediato que $L(f) \supset C$.

Mostraremos agora que existem de fato mergulhos de M^m em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 6. *Seja M^m de classe C^k e dimensão m. Se $s \geq 2m+1$, os mergulhos próprios $g\colon M^m \to \mathbb{R}^s$, de classe C^1, constituem um aberto não-vazio em $W^1(M; \mathbb{R}^s)$.*

Demonstração: Seja $\Sigma\varphi_i = 1$ uma partição da unidade de classe C^k em M. A função real $\lambda\colon M \to \mathbb{R}$, definida por $\lambda(p) = \Sigma i \cdot \varphi_i(p)$, é própria. Tomando-se um vetor $v \neq 0$ em $\mathbb{R}^s$ e pondo-se $f(p) = \lambda(p) \cdot v$, obtém-se uma aplicação própria $f\colon M \to \mathbb{R}^s$, de classe C^k. Pela proposição anterior, existe uma imersão injetiva $g\colon M \to \mathbb{R}^s$, de classe C^k, tal que $|f(p) - g(p)| < 1$ para todo $p \in M$. Isto implica $L(g) = L(f) = \emptyset$, donde g é própria e portanto um mergulho. Assim não é vazio o conjunto dos mergulhos próprios de M em $\mathbb{R}^s$. Este conjunto é a interseção de dois abertos, (as aplicações próprias e os mergulhos) logo é aberto.

Corolário. *Seja M^m uma variedade de classe C^k, $k \geq 1$. Existe um mergulho $f\colon M^m \to \mathbb{R}^{2m+1}$, de classe C^k, tal que a imagem $f(M)$ é uma superfície de classe C^∞.*

Com efeito, basta usar a Proposição 10 do Capítulo X.

Proposição 7. *Todo atlas máximo de classe C^k $(k \geq 1)$ numa variedade M^m contém um atlas (máximo) de classe C^∞.*

Demonstração: Vide Observação seguinte à Proposição 10, Capítulo X.

Proposição 8. *Toda variedade M^m de classe C^k possui uma métrica riemaniana completa de classe C^{k-1}.*

Demonstração: Devemos obter em M uma métrica riemaniana cuja distância intrínseca correspondente torne M um espaço métrico completo. Consideremos um mergulho próprio $f\colon M \to \mathbb{R}^s$, de classe C^k e tomemos em M a métrica riemaniana induzida por f da métrica usual em $\mathbb{R}^s$. Ela faz de f uma isometria, de modo que, por simplicidade, podemos identificar M com $f(M)$, tomando assim M como uma superfície em $\mathbb{R}^s$. Como f é própria, a superfície M será um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^s$. Seja (p_n) uma seqüência de Cauchy em M, relativamente à distância intrínseca d. Como $|p-q| \leq d(p,q)$, segue-se que (p_n) é de Cauchy relativamente à norma de $\mathbb{R}^s$. Sendo este espaço completo, existe $p \in \mathbb{R}^s$ tal que $\lim |p-p_n| = 0$. Como M é fechada em $\mathbb{R}^s$, temos $p \in M$. Como a distância intrínseca e a norma definem em M a mesma topologia, temos $\lim d(p_n, p) = 0$. Assim, M é completo relativamente à distância intrínseca.

Observações:

1) Os mergulhos próprios de classe C^k formam um subconjunto não-vazio de $W^1(M;\mathbb{R}^s)$, o qual só é aberto se $k = 1$. Se, porém, tomarmos a topologia de Whitney de classe C^k, os mergulhos de classe C^k formam um aberto em $W^k(M^m;\mathbb{R}^s)$, $s \geq 2m+1$.

2) Vimos que se $f\colon M \to \mathbb{R}^s$ mergulha M sobre um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^s$ então a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^s$ induz em M, através de f, uma métrrica riemaniana completa. Deve-se observar que a recíproca é falsa: dado um mergulho isométrico $f\colon M \to \mathbb{R}^s$, onde M é uma variedade riemaniana completa, $f(M)$ pode deixar de ser um subconjunto fechado de M. Exemplo: tome o mergulho $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definido por $f(t) = (1+e^t)e^{it}$. (Geometricamente, $f(\mathbb{R})$ espirala em torno do círculo S^1 quando $t \to -\infty$.) Reparametrizando f pelo comprimento de arco, obteremos um mergulho isométrico $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Entretanto, $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R})$ não é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$. Em outras palavras: considerando uma

superfície $M \subset \mathbb{R}^s$ com a métrica riemaniana induzida por $\mathbb{R}^s$, a distância intrínseca pode fazer de M um espaço métrico completo, sem que M seja um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^s$.

3) Dadas arbitrariamente duas variedades M^m, N^s, de classe C^k, com $s \geq 2m+1$, os mergulhos de classe C^k de M^m em N^s constituem um subconjunto aberto não-vazio de $W^k(M;N)$. Para ver isto, basta considerar em N um sistema de coordenadas $y\colon V \to \mathbb{R}^s$ tal que $y(V) = \mathbb{R}^s$. Obtido um mergulho $g\colon M \to \mathbb{R}^s$, a composta $y^{-1} \circ g\colon M \to N$ será também um mergulho.

4 Espaços de Baire

Nesta seção, melhoraremos a Proposição 5, mostrando que, para $s \geq 2m$, as imersões injetivas de M^m em $\mathbb{R}^s$ formam um conjunto de Baire em $W^1(M;\mathbb{R}^s)$. Isto é mais do que dizer que elas formam um subconjunto denso. Com efeito, a interseção de dois subconjuntos densos de um espaço X pode ser vazia (por exemplo: [racionais] $\cap$ [irracionais] $= \emptyset$) mas a interseção de uma família enumerável de conjuntos de Baire, num espaço de Baire X, é ainda um conjunto de Baire, e portanto denso em X. Os conjuntos de Baire são os análogos topológicos dos complementares de conjuntos de medida nula em $\mathbb{R}^n$. Essa analogia, entretanto, não funciona em qualquer espaço topológico, mas apenas nos espaços de Baire. Passemos às definições formais.

O análogo topológico de um conjunto de medida nula é um *conjunto magro*. Um subconjunto S de um espaço topológico diz-se *magro em* X quando $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ é reunião enumerável de conjuntos $S_i \subset X$ tais que $\operatorname{int}(\overline{S}_i) = \emptyset$. Assim um conjunto S é magro em X se, e somente se, $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ onde cada F_i é um subconjunto

fechado de X com $\operatorname{int} F_i = \emptyset$.

O complementar de um subconjunto magro é chamado um *conjunto de Baire.* Portanto, um subconjunto B de um espaço topológico x é um *conjunto de Baire em* X se, e somente se, $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ é a interseção enumerável de subconjuntos $A_i \subset X$ tais que $\operatorname{int} A_i$ é denso em X. Para que $B \subset X$ seja um subconjunto de Baire em X é necessário e suficiente que A contenha uma interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos em X.

Uma reunião enumerável de subconjuntos magros de X é magra em X. Por dualidade, uma interseção enumerável de subconjuntos de Baire de X é também um subconjunto de Baire de X.

Um espaço topológico X diz-se um *espaço de Baire* quando todo subconjunto de Baire $B \subset X$ é denso em X. Equivalentemente, X é um espaço de Baire se todo subconjunto magro de X tem interior vazio.

O conhecido "Teorema da Categoria de Baire"afirma que todos os espaços métricos completos, bem como todos os espaços topológicos localmente compactos de Hausdorff são espaços de Baire.

Imitaremos agora a demonstração deste resultado clássico, obtendo a

Proposição 9. *Qualquer que seja a variedade diferenciável* M, $W^1(M;\mathbb{R}^s)$ *é um espaço de Baire.*

Demonstração: Seja $B = \bigcap A_i$ a interseção de uma seqüência enumerável $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ de subconjuntos abertos densos de $W^1(M;\mathbb{R}^s)$. Queremos mostrar que B é denso em $W^1(M;\mathbb{R}^s)$. Seja U um qualquer subconjunto aberto e não-vazio neste espaço. Provaremos a existência de um elemento $f \in U \cap B$. Dada uma função contínua e positiva $\varepsilon \colon M \to \mathbb{R}$ indicaremos com $W^1[g;\varepsilon]=$ $\{h \in W^1(M;\mathbb{R}^s); |h - g|_1 \leq \varepsilon\}$ a "bola fechada"com centro $g \in W^1(M;\mathbb{R}^s)$. Como A_1 é aberto e denso, existem $f_1 \in W^1(M;\mathbb{R}^s)$

e $\varepsilon_1\colon M \to (0,\infty)$ tais que $W^1[f_1;\varepsilon_1] \subset A_1 \cap U$. Como A_2 é aberto e denso, podemos encontrar $f_2 \in W^1(M;\mathbb{R}^s)$ e $\varepsilon_2\colon M \to (0,\infty)$ tais que $W^1[f_2;\varepsilon_2] \subset A_2 \cap W^1[f_1 \cdot \varepsilon_1] \subset A_1 \cap A_2 \cap U$. Por indução, encontramos uma seqüência de aplicações $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$ em $W^1(M;\mathbb{R}^s)$ e uma seqüência de funções contínuas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\colon M \to (0,\infty)$ tais que $W^1[f_i;\varepsilon_i] \subset A_i \cap [f_{i-1};e_{i-1}] \subset A_1 \cap \cdots \cap A_i \cap U$. Podemos supor $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots \geq \varepsilon_i \geq \dots$ e que $\varepsilon_i(p) < 1/i$ para todo $p \in M$.

Notemos que para todo $p \in M$ e para todo par de naturais i, r tem-se

$$(*) \qquad |f_i(p) - f_{i+r}(p)| \leq \varepsilon_i(p) \quad \text{e} \quad |f_i'(p) - f_{i+r}'(p)| \leq \varepsilon_i(p)$$

pois $f_{i+r} \in W^1[f_i;\varepsilon_i]$. Por conseguinte $(f_i(p))$ e $(f_i'(p))$ são seqüências de Cauchy em $\mathbb{R}^s$ e $\mathcal{L}(TM_p;\mathbb{R}^s)$ respectivamente. Logo existem, para cada $p \in M$, os limites $f(p) = \lim\limits_{i\to\infty} f_i(p) \in \mathbb{R}^s$ e $\hat{f}(p) = \lim\limits_{i\to\infty} f_i'(p) \in \mathcal{L}(TM_p;\mathbb{R}^s)$. Fazendo $r \to \infty$ nas desigualdades (*) obtemos

$$(**) \qquad |f_i(p) - f(p)| \leq \varepsilon_i(p) < 1/i \ \text{ e } \ |f_i'(p) - \hat{f}(p)| \leq \varepsilon_i(p) < 1/i$$

para todo inteiro i e para todo $p \in M$.

Queremos mostrar que $f \in C^1$ e que $f'(p) = \hat{f}(p)$ para todo $p \in M$. Basta mostrar isto localmente. Em torno de cada ponto de M, consideraremos um sistema de coordenadas $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ e, por simplicidade, poremos $\varphi = x^{-1}$. Podemos sempre supor que $|\varphi'|$ é limitada em $x(U)$. Então, as desigualdades (**) implicam que a seqüência de aplicações $f_i\varphi\colon x(U) \to \mathbb{R}^s$ e $f_i\varphi \cdot \varphi'\colon x(U) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^s)$ convergem uniformemente em $x(U)$ para $f\varphi$ e $\hat{f}\varphi \cdot \varphi'$, respectivamente. Por um teorema conhecido de Análise (vide AER$^{\mathrm{n}}$, Prop. 7 do Cap. 6), segue-se que $f\varphi \in C^1$ e $(f\varphi)' = \hat{f}\varphi \cdot \varphi'$. Isto significa que $f \in C^1$ em U e, como $(f\varphi)' = f'\varphi \cdot \varphi'$, temos

$f' = \hat{f}$ em U. Como os abertos U cobrem M, concluimos que $f \in W^1(M;\mathbb{R}^s)$ e $\hat{f}(p) = f'(p)$ para todo $p \in M$. As desigualdades (**) significam que

$$f \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W^1[f;\varepsilon_i] \subset (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i \cap \ldots) \cap U$$

como queríamos demonstrar.

Observações:

1) Não se pode concluir, na demonstração acima que $f_i \to f$ no sentido do espaço $W^1(M;\mathbb{R}^s)$.

2) Para todo $r \geq 0$, $W^r(M;\mathbb{R}^s)$ é um espaço de Baire. A demonstração se faz nas mesmas linhas da anterior.

3) Para M^m e N^s quaisquer, $W^r(M^m;N^s)$ é um espaço de Baire. (Usar o mesmo princípio da demonstração acima, tomando coordenadas locais em N, com imagem $\mathbb{R}^s$.)

O resultado abaixo refina a Proposição 5.

Proposição 10. *Seja M^m uma variedade de dimensão m e classe C^k. Se $s \geq 2m+1$, as imersões injetivas $g\colon M \to \mathbb{R}^s$, de classe C^1, formam um conjunto de Baire em $W^1(M.\mathbb{R}^s)$.*

Demonstração: Seja X o conjunto das imersões injetivas de classe C^1 de M em $\mathbb{R}^s$. Escrevendo $M = \bigcup X_i$ como reunião enumerável de compactos, com $K_i \subset K_{i+1}$, vemos que $X = \bigcap X_i$ onde, para cada $i = 1, 2, \ldots, X_i$ é o conjunto das aplicações $f\colon M \to \mathbb{R}^s$, de classe C^1, tais que $f|K_i$ é um mergulho. Basta então demonstrar que cada X_i é aberto e denso em $W^1(M;\mathbb{R}^s)$. Que X_i é aberto segue-se do Escólio seguinte à Proposição 6, Capítulo X. Que é denso, demonstra-se do mesmo modo que na Proposição 5.

ACRÉSCIMOS E ESCLARECIMENTOS

As abreviaturas AER$^{\rm n}$ e ETG referem-se aos livros:

" Análise no Espaço R^n - por Elon Lages Lima.
Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

"Elementos de Topologia Geral- por Elon Lages Lima.
Editora Ao Livro Técnico, 1970.